# СТЕПЕНИ И КОРНИ

учебное пособие для школьников и поступающих в вузы

**Автор**

Трепачёв Дмитрий

2025 год, v1.0.0

# Введение

Всем привет! Меня зовут Трепачёв Дмитрий. Я работаю репетитором по математике, физике и информатике с 2010 года. За это время через мои занятия прошли сотни учеников — от пятиклассников, которые только начинают знакомиться с алгеброй, до выпускников, готовящихся к ЕГЭ и поступлению в вузы.

Эту книгу я сделал для своих занятий. Степени и корни — это одна из самых важных тем в школьной математике. Без уверенного владения этой темой невозможно двигаться дальше: ни многочлены, ни уравнения, ни функции, ни логарифмы не будут поняты до конца. Однако именно эта тема часто вызывает у учеников затруднения. Многие путаются в правилах, забывают, когда показатели складываются, а когда умножаются, теряют знаки при работе с отрицательными числами.

В этой книге я постарался разложить всё по полочкам и создать чёткую систему, в которой каждое правило занимает своё место.

# О чём эта книга

Мы начинаем с самого простого — с определения степени с натуральным показателем. Постепенно, шаг за шагом, осваиваем все свойства степеней:

- умножение и деление степеней с одинаковым основанием;
- возведение степени в степень;
- степень произведения и частного.

Затем расширяем понятие степени — знакомимся с нулевым и отрицательным показателями.

После этого переходим к корням: определяем арифметический корень, изучаем его свойства, учимся выносить и вносить множители.

И наконец, объединяем степени и корни — вводим степень с дробным показателем, учимся свободно переходить от одной формы записи к другой.

В конце книги — большой практикум, где собраны задачи на все приёмы вперемешку.

# Как устроена книга

Каждая глава построена одинаково: сначала теория (только самое нужное, без воды), потом разобранные примеры, а затем большое количество задач для самостоятельного решения. Задачи специально подобраны так, чтобы от простого к сложному отработать каждый навык.

В конце каждого логического блока есть обобщающая глава-практика, а в конце книги — итоговая практика на все приёмы.

Если вы школьник и готовитесь к экзаменам — вам достаточно проработать все главы последовательно. Если вы учитель — можете использовать книгу как источник готовых задач для своих уроков.

# Благодарности

Спасибо моим ученикам, которые своими вопросами помогли понять, какие темы нужно объяснять особенно тщательно. Спасибо вам, читатель, за то, что решили потратить время на изучение этой важной темы.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть пособия по алгебре, геометрии, физике — всё, что я наработал за годы преподавания.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я преподаю математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ.

Удачи в изучении степеней и корней!

*Дмитрий Трепачёв*

# Оглавление


**1 Степень с натуральным показателем** **9**
1.1 Теория . . . 9
Пример 1. Степень $2^5$ . . . 9
Пример 2. Квадрат числа $3^2$ . . . 9
Пример 3. Куб числа $4^3$ . . . 10
Пример 4. Первая степень $7^1$ . . . 10
Пример 5. Отрицательное основание $(-3)^2$ . . . 10
Пример 6. Отрицательное основание $(-3)^3$ . . . 10
Пример 7. Нулевое основание $0^5$ . . . 10
Пример 8. Отрицательное основание с большим показателем $(-2)^6$ . . . 10
Пример 9. Важное предупреждение . . . 10
1.2 Задачи . . . 11

**2 Умножение степеней с одинаковым основанием** **12**
2.1 Теория . . . 12
Пример 1. Умножение степеней с одинаковым основанием . . . 12
Пример 2. Умножение трёх степеней . . . 12
Пример 3. Степень с буквенным основанием . . . 12
Пример 4. Отрицательное основание . . . 12
Пример 5. Степень с коэффициентом . . . 13
Пример 6. Более сложный пример . . . 13
Пример 7. Степень с разными основаниями . . . 13
Пример 8. Важное предупреждение . . . 13
2.2 Задачи . . . 13

**3 Деление степеней с одинаковым основанием** **15**
3.1 Теория . . . 15
Пример 1. Деление степеней с одинаковым основанием . . . 15
Пример 2. Деление степеней . . . 15
Пример 3. Деление степеней с буквенным основанием . . . 15
Пример 4. Отрицательное основание . . . 15
Пример 5. Деление с коэффициентами . . . 16
Пример 6. Более сложный пример . . . 16
Пример 7. Случай, когда показатели равны . . . 16
Пример 8. Важное предупреждение . . . 16
3.2 Задачи . . . 16

**4 Возведение степени в степень** **18**
4.1 Теория . . . 18
Пример 1. Возведение степени в степень . . . 18
Пример 2. Возведение степени в степень . . . 18
Пример 3. Степень с буквенным основанием . . . 18
Пример 4. Отрицательное основание . . . 18
Пример 5. Несколько степеней подряд . . . 19
Пример 6. Степень произведения . . . 19

Пример 7. Степень частного . . . 19
Пример 8. Смешанный пример . . . 19
Пример 9. Важное предупреждение . . . 19
4.2 Задачи . . . 19

**5 Степень произведения и частного 21**
5.1 Теория . . . 21
Пример 1. Произведение в степени . . . 21
Пример 2. Произведение с буквами . . . 21
Пример 3. Произведение трёх множителей . . . 21
Пример 4. Произведение с коэффициентом . . . 21
Пример 5. Более сложный пример . . . 22
Пример 6. Дробь в степени . . . 22
Пример 7. Дробь с буквами . . . 22
Пример 8. Дробь с коэффициентами . . . 22
Пример 9. Смешанный пример . . . 22
Пример 10. Важное предупреждение . . . 22
5.2 Задачи . . . 22

**6 Практика по блоку 1 24**
6.1 Теория . . . 24
6.2 Задачи . . . 24

**7 Степень с нулевым показателем 26**
7.1 Теория . . . 26
Пример 1. Нулевая степень числа . . . 26
Пример 2. Нулевая степень отрицательного числа . . . 26
Пример 3. Нулевая степень дроби . . . 26
Пример 4. Выражение с нулевой степенью . . . 27
Пример 5. Произведение со степенями . . . 27
Пример 6. Деление со степенями . . . 27
Пример 7. Выражение с переменной . . . 27
Пример 8. Степень произведения . . . 27
Пример 9. Степень дроби . . . 27
Пример 10. Важное предупреждение . . . 27
7.2 Задачи . . . 27

**8 Степень с отрицательным целым показателем 29**
8.1 Теория . . . 29
Пример 1. Отрицательная степень числа . . . 29
Пример 2. Отрицательная степень дроби . . . 29
Пример 3. Отрицательная степень отрицательного числа . . . 29
Пример 4. Произведение со степенями . . . 30
Пример 5. Деление со степенями . . . 30
Пример 6. Возведение степени в степень . . . 30
Пример 7. Степень произведения . . . 30
Пример 8. Степень дроби . . . 30
Пример 9. Смешанный пример . . . 30
Пример 10. Важное предупреждение . . . 31
8.2 Задачи . . . 31

**9 Действия со степенями с целым показателем 33**
9.1 Теория . . . 33
Пример 1. Умножение с отрицательными показателями . . . 33
Пример 2. Деление с отрицательными показателями . . . 33

Пример 3. Возведение отрицательной степени в степень . . . 33
Пример 4. Степень произведения с отрицательным показателем . . . 33
Пример 5. Степень дроби с отрицательным показателем . . . 34
Пример 6. Смешанный пример с числами и буквами . . . 34
Пример 7. Вычисление значения выражения . . . 34
Пример 8. Выражение с разными основаниями . . . 34
Пример 9. Важное предупреждение . . . 34
9.2 Задачи . . . 35

**10 Практика по блоку 2** **37**
10.1 Теория . . . 37
10.2 Задачи . . . 37

**11 Определение арифметического корня** **40**
11.1 Теория . . . 40
Пример 1. Квадратный корень . . . 40
Пример 2. Квадратный корень из нуля . . . 40
Пример 3. Кубический корень . . . 40
Пример 4. Корень четвёртой степени . . . 41
Пример 5. Корень из степени . . . 41
Пример 6. Корень из квадрата числа . . . 41
Пример 7. Корень нечётной степени из отрицательного числа (не арифметический) . . . 41
Пример 8. Сравнение корней . . . 41
Пример 9. Важное предупреждение . . . 41
11.2 Задачи . . . 41

**12 Корень из произведения и частного** **43**
12.1 Теория . . . 43
Пример 1. Корень из произведения . . . 43
Пример 2. Корень из произведения трёх чисел . . . 43
Пример 3. Корень из частного . . . 43
Пример 4. Корень из дроби с буквами . . . 44
Пример 5. Корень из произведения с буквами . . . 44
Пример 6. Корень из произведения степеней . . . 44
Пример 7. Корень из частного со степенями . . . 44
Пример 8. Смешанный пример . . . 44
Пример 9. Ещё один пример . . . 44
Пример 10. Важное предупреждение . . . 44
12.2 Задачи . . . 45

**13 Возведение корня в степень и извлечение корня из степени** **47**
13.1 Теория . . . 47
Пример 1. Возведение корня в степень . . . 47
Пример 2. Возведение корня в степень . . . 47
Пример 3. Возведение корня в степень . . . 47
Пример 4. Возведение корня в степень с буквами . . . 48
Пример 5. Корень из корня . . . 48
Пример 6. Корень из корня с буквами . . . 48
Пример 7. Несколько корней подряд . . . 48
Пример 8. Смешанный пример . . . 48
Пример 9. Ещё один пример . . . 48
Пример 10. Важное предупреждение . . . 48
13.2 Задачи . . . 48

**14 Вынесение множителя из-под знака корня** **51**

14.1 Теория . . . 51
Пример 1. Вынесение из квадратного корня . . . 51
Пример 2. Вынесение из квадратного корня . . . 51
Пример 3. Вынесение из квадратного корня . . . 51
Пример 4. Вынесение из кубического корня . . . 51
Пример 5. Вынесение из кубического корня . . . 52
Пример 6. Вынесение из корня четвёртой степени . . . 52
Пример 7. Вынесение с буквами . . . 52
Пример 8. Вынесение с буквами (кубический корень) . . . 52
Пример 9. Несколько множителей . . . 52
Пример 10. Важное предупреждение . . . 52
14.2 Задачи . . . 52

**15 Внесение множителя под знак корня** **55**
15.1 Теория . . . 55
Пример 1. Внесение под квадратный корень . . . 55
Пример 2. Внесение под квадратный корень . . . 55
Пример 3. Внесение под кубический корень . . . 55
Пример 4. Внесение под корень четвёртой степени . . . 55
Пример 5. Внесение отрицательного множителя . . . 56
Пример 6. Внесение с буквами . . . 56
Пример 7. Внесение с буквами (кубический корень) . . . 56
Пример 8. Сравнение чисел с помощью внесения под корень . . . 56
Пример 9. Обратная операция к вынесению . . . 56
Пример 10. Важное предупреждение . . . 56
15.2 Задачи . . . 56

**16 Практика по блоку 3** **59**
16.1 Теория . . . 59
16.2 Задачи . . . 59

**17 Степень с дробным показателем. Определение** **61**
17.1 Теория . . . 61
Пример 1. Степень с дробным показателем . . . 61
Пример 2. Степень с дробным показателем . . . 61
Пример 3. Степень с дробным показателем . . . 61
Пример 4. Степень с числителем не 1 . . . 62
Пример 5. Степень с числителем не 1 . . . 62
Пример 6. Степень с числителем не 1 . . . 62
Пример 7. Степень с дробным показателем от дроби . . . 62
Пример 8. Степень с отрицательным дробным показателем . . . 62
Пример 9. Степень с отрицательным дробным показателем . . . 62
Пример 10. Важное предупреждение . . . 62
17.2 Задачи . . . 62

**18 Действия со степенями с рациональным показателем** **65**
18.1 Теория . . . 65
Пример 1. Умножение степеней . . . 65
Пример 2. Умножение степеней . . . 65
Пример 3. Деление степеней . . . 65
Пример 4. Деление степеней . . . 65
Пример 5. Возведение степени в степень . . . 66
Пример 6. Возведение степени в степень . . . 66
Пример 7. Степень произведения . . . 66
Пример 8. Степень частного . . . 66

Пример 9. Смешанный пример . . . 66
Пример 10. Смешанный пример с числами . . . 66
18.2 Задачи . . . 66

**19 Переход от корней к степеням и обратно** **69**
19.1 Теория . . . 69
Пример 1. Корень в степень . . . 69
Пример 2. Корень в степень . . . 69
Пример 3. Корень в степень с буквами . . . 69
Пример 4. Степень в корень . . . 70
Пример 5. Степень в корень . . . 70
Пример 6. Степень в корень с буквами . . . 70
Пример 7. Упрощение выражения с помощью перехода к степеням . . . 70
Пример 8. Упрощение выражения с помощью перехода к степеням . . . 70
Пример 9. Сравнение чисел с помощью перехода к степеням . . . 70
Пример 10. Обратный переход . . . 70
19.2 Задачи . . . 70

**20 Практика по блоку 4** **73**
20.1 Теория . . . 73
20.2 Задачи . . . 73

**21 Упрощение выражений со степенями и корнями** **76**
21.1 Теория . . . 76
Пример 1. Приведение к общему основанию . . . 76
Пример 2. Приведение к общему основанию . . . 76
Пример 3. Переход к степеням . . . 76
Пример 4. Вынесение общего множителя . . . 77
Пример 5. Вынесение общего множителя . . . 77
Пример 6. Произведение корней . . . 77
Пример 7. Квадрат суммы . . . 77
Пример 8. Сложное выражение . . . 77
Пример 9. Освобождение от иррациональности в знаменателе . . . 77
Пример 10. Важное предупреждение . . . 77
21.2 Задачи . . . 78

**22 Сравнение степеней и корней** **80**
22.1 Теория . . . 80
Пример 1. Сравнение степеней с одинаковым основанием . . . 80
Пример 2. Сравнение степеней с одинаковым основанием меньше 1 . . . 80
Пример 3. Сравнение степеней с одинаковым показателем . . . 80
Пример 4. Приведение к одному показателю . . . 80
Пример 5. Приведение к одному основанию . . . 80
Пример 6. Внесение множителя под корень . . . 81
Пример 7. Возведение в квадрат . . . 81
Пример 8. Оценка . . . 81
Пример 9. Сравнение через разность . . . 81
Пример 10. Сравнение дробных степеней . . . 81
22.2 Задачи . . . 81

**23 Освобождение от иррациональности в знаменателе** **84**
23.1 Теория . . . 84
Пример 1. Один квадратный корень в знаменателе . . . 84
Пример 2. Один квадратный корень в знаменателе . . . 85
Пример 3. Сумма с квадратным корнем в знаменателе . . . 85

Пример 4. Разность с квадратным корнем в знаменателе . . . 85
Пример 5. Выражение с числителем . . . 85
Пример 6. Кубический корень в знаменателе . . . 85
Пример 7. Кубический корень в знаменателе (общий случай) . . . 85
Пример 8. Сумма кубических корней в знаменателе . . . 86
Пример 9. Корень четвёртой степени в знаменателе . . . 86
Пример 10. Важное предупреждение . . . 86
23.2 Задачи . . . 86

**24 Итоговая практика на все приёмы** **89**
24.1 Теория . . . 89
24.2 Задачи . . . 89

# Степень с натуральным показателем

## Теория

В этой главе мы познакомимся с самым главным понятием — степенью с натуральным показателем. Это основа всей темы "Степени и корни".

**Определение:** Степенью числа $a$ с натуральным показателем $n$ называется произведение $n$ множителей, каждый из которых равен $a$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ — основание степени (любое число)
- $n$ — показатель степени (натуральное число: 1, 2, 3, 4, ...)
- $a^n$ — степень

**Важные частные случаи:**

- $a^1 = a$ (любое число в первой степени равно самому себе)
- $a^2 = a \cdot a$ — квадрат числа
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$ — куб числа

**Знак степени:**

- Если основание положительное ($a > 0$), то степень положительна
- Если основание отрицательное ($a < 0$), то:
  - при чётном $n$ степень положительна: $(-2)^2 = 4$, $(-2)^4 = 16$
  - при нечётном $n$ степень отрицательна: $(-2)^3 = -8$, $(-2)^5 = -32$
- Если основание равно нулю, то $0^n = 0$ (при $n \geq 1$)

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Степень* $2^5$

Вычислите:

$$2^5$$

По определению: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
Считаем:

$$2 \cdot 2 = 4$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$8 \cdot 2 = 16$$
$$16 \cdot 2 = 32$$

Таким образом, $2^5 = 32$.

## Пример 2

*Квадрат числа* $3^2$

Вычислите:

$$3^2$$

По определению: $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

## Пример 3

*Куб числа* $4^3$

Вычислите:

$$4^3$$

По определению: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$

## Пример 4

*Первая степень* $7^1$

Вычислите:

$$7^1$$

Любое число в первой степени равно самому себе: $7^1 = 7$

## Пример 5

*Отрицательное основание* $(-3)^2$

Вычислите:

$$(-3)^2$$

По определению: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$
Так как показатель чётный, результат положительный.

## Пример 6

*Отрицательное основание* $(-3)^3$

Вычислите:

$$(-3)^3$$

$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27$
Так как показатель нечётный, результат отрицательный.

## Пример 7

*Нулевое основание* $0^5$

Вычислите:

$$0^5$$

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

## Пример 8

*Отрицательное основание с большим показателем* $(-2)^6$

Вычислите:

$$(-2)^6$$

Так как показатель чётный, результат будет положительным:

$$(-2)^6 = 64$$

Проверим: $(-2)^2 = 4$, $(-2)^4 = 16$, $(-2)^6 = 64$

## Пример 9

*Важное предупреждение*

Не путайте $(-3)^2$ и $-3^2$:

- $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ — в степень возводится число $-3$
- $-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9$ — в степень возводится число 3, а потом ставится минус

Это разные вещи! Будьте внимательны.

# Задачи

**1.** Вычислите:

1) $2^3$ 4) $4^3$ 7) $6^2$ 10) $3^4$

2) $3^2$ 5) $2^4$ 8) $7^2$ 11) $5^3$

3) $5^2$ 6) $3^3$ 9) $2^5$ 12) $10^3$

**2.** Вычислите:

1) $1^5$ 3) $0^4$ 5) $10^1$ 7) $100^1$

2) $1^{10}$ 4) $0^7$ 6) $25^1$ 8) $1000^1$

**3.** Вычислите:

1) $(-2)^2$ 4) $(-3)^3$ 7) $(-5)^2$ 10) $(-1)^3$

2) $(-2)^3$ 5) $(-4)^2$ 8) $(-5)^3$ 11) $(-1)^4$

3) $(-3)^2$ 6) $(-4)^3$ 9) $(-1)^2$ 12) $(-1)^5$

**4.** Вычислите:

1) $(-2)^2$ и $-2^2$ 3) $(-4)^2$ и $-4^2$ 5) $(-3)^3$ и $-3^3$ 7) $(-1)^4$ и $-1^4$

2) $(-3)^2$ и $-3^2$ 4) $(-2)^3$ и $-2^3$ 6) $(-4)^3$ и $-4^3$ 8) $(-1)^5$ и $-1^5$

**5.** Найдите значение выражения:

1) $2^2 + 3^2$ 4) $4^3 - 2^3$ 7) $(-2)^2 + (-3)^2$

2) $5^2 - 4^2$ 5) $3^2 \cdot 2^2$ 8) $(-2)^3 + (-3)^3$

3) $2^3 + 3^3$ 6) $6^2 : 2^2$ 9) $2^2 \cdot (-3)^2$

# Умножение степеней с одинаковым основанием

## Теория

В этой главе мы научимся умножать степени с одинаковыми основаниями. Это первое и самое важное свойство степеней.

**Запомните правило:**

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ — основание степени (любое число)
- $n$ и $m$ — натуральные показатели (1, 2, 3, ...)
- При умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$. Всего множителей $3 + 2 = 5$.

**Важно!** Основания должны быть одинаковыми. Если основания разные, это правило не работает.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Умножение степеней с одинаковым основанием*

Вычислите:

$$2^3 \cdot 2^4$$

По правилу: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
Вычисляем: $2^7 = 128$
Проверим: $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $8 \cdot 16 = 128$ — всё верно.

## Пример 2

*Умножение трёх степеней*

Вычислите:

$$5^2 \cdot 5^3 \cdot 5^1$$

Показатели складываем: $2 + 3 + 1 = 6$
Получаем: $5^6 = 15625$

## Пример 3

*Степень с буквенным основанием*

Упростите выражение:

$$x^4 \cdot x^7$$

По правилу: $x^4 \cdot x^7 = x^{4+7} = x^{11}$

## Пример 4

*Отрицательное основание*

Вычислите:

$$(-3)^2 \cdot (-3)^3$$

Сначала применяем правило: $(-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

Теперь вычисляем: $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$
(Нечётная степень отрицательного числа даёт отрицательный результат)

## Пример 5

*Степень с коэффициентом*

Упростите выражение:

$$2x^3 \cdot 5x^4$$

Здесь есть и числа, и степени. Перемножаем отдельно числа, отдельно степени:

$$2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot x^4 = 10 \cdot x^{3+4} = 10x^7$$

## Пример 6

*Более сложный пример*

Упростите выражение:

$$3a^2 \cdot 4a^5 \cdot 2a^3$$

Числа: $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$
Степени: $a^2 \cdot a^5 \cdot a^3 = a^{2+5+3} = a^{10}$
Результат: $24a^{10}$

## Пример 7

*Степень с разными основаниями*

Можно ли упростить $2^3 \cdot 3^4$?
Нет, так как основания разные (2 и 3). Это выражение остаётся без изменений.

## Пример 8

*Важное предупреждение*

Не путайте умножение степеней со сложением степеней:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ — показатели складываем
- $a^n + a^m$ — так просто не упрощается (кроме случаев, когда можно вынести общий множитель)

# Задачи

**1.** Представьте в виде степени:

**1)** $2^3 \cdot 2^4$ **2)** $3^2 \cdot 3^5$ **3)** $5^4 \cdot 5^2$ **4)** $7^3 \cdot 7^4$ **5)** $10^2 \cdot 10^3$ **6)** $4^5 \cdot 4^3$ **7)** $6^2 \cdot 6^4$ **8)** $8^3 \cdot 8^2$ **9)** $9^4 \cdot 9^5$ **10)** $11^2 \cdot 11^3$ **11)** $12^4 \cdot 12^2$ **12)** $15^3 \cdot 15^4$

**2.** Представьте в виде степени:

**1)** $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2$ **2)** $3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^4$ **3)** $5^4 \cdot 5^2 \cdot 5^3$ **4)** $7^2 \cdot 7^5 \cdot 7^1$ **5)** $4^3 \cdot 4^4 \cdot 4^2$ **6)** $6^5 \cdot 6^2 \cdot 6^3$ **7)** $8^2 \cdot 8^3 \cdot 8^4$ **8)** $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^2$ **9)** $x^2 \cdot x^5$ **10)** $y^3 \cdot y^4$ **11)** $a^5 \cdot a^6$ **12)** $b^4 \cdot b^7$

**3.** Упростите выражение:

1) $2x^3 \cdot 3x^4$

2) $4a^2 \cdot 5a^5$

3) $3b^4 \cdot 2b^3$

4) $5y^2 \cdot 4y^7$

5) $6c^3 \cdot 2c^4 \cdot 3c^2$

6) $2m^4 \cdot 5m^2 \cdot 3m^3$

7) $7x^5 \cdot 2x^3 \cdot x^4$

8) $4a^3 \cdot 3a^2 \cdot 5a^1$

9) $(-2)^3 \cdot (-2)^4$

10) $(-3)^2 \cdot (-3)^5$

11) $(-5)^4 \cdot (-5)^3$

12) $(-4)^2 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^1$

**4.** Вычислите значение выражения:

1) $2^3 \cdot 2^2$

2) $3^2 \cdot 3^3$

3) $5^2 \cdot 5^3$

4) $4^3 \cdot 4^2$

5) $(-2)^2 \cdot (-2)^3$

6) $(-3)^3 \cdot (-3)^2$

7) $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^1$

8) $3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3$

9) $10^2 \cdot 10^3$

10) $10^1 \cdot 10^2 \cdot 10^3$

**5.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$

2) $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$

3) $5^4 \cdot 5^3 = 5^7$

4) $x^2 \cdot x^3 = x^6$

5) $a^5 \cdot a^4 = a^{20}$

6) $y^3 \cdot y^4 = y^7$

# Деление степеней с одинаковым основанием

## Теория

В этой главе мы научимся делить степени с одинаковыми основаниями. Это второе важное свойство степеней.

**Запомните правило:**

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ — основание степени (любое число, кроме нуля)
- $n$ и $m$ — натуральные показатели, причём $n > m$ (пока рассматриваем этот случай)
- При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a \cdot a \cdot a = a^3$. В числителе 5 множителей, в знаменателе 2, после сокращения остаётся $5 - 2 = 3$ множителя.

**Важно!** Основания должны быть одинаковыми. Если основания разные, это правило не работает.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Деление степеней с одинаковым основанием*

Вычислите:

$$2^5 : 2^3$$

По правилу: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

Проверим: $2^5 = 32$, $2^3 = 8$, $32 : 8 = 4$ — всё верно.

## Пример 2

*Деление степеней*

Вычислите:

$$3^7 : 3^4$$

$3^7 : 3^4 = 3^{7-4} = 3^3 = 27$

## Пример 3

*Деление степеней с буквенным основанием*

Упростите выражение:

$$x^8 : x^3$$

$x^8 : x^3 = x^{8-3} = x^5$

## Пример 4

*Отрицательное основание*

Вычислите:

$$(-2)^5 : (-2)^2$$

Сначала применяем правило: $(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3 = -8$

## Пример 5

*Деление с коэффициентами*

Упростите выражение:

$$6x^7 : 2x^3$$

Делим отдельно числа, отдельно степени:

$$(6 : 2) \cdot (x^7 : x^3) = 3 \cdot x^{7-3} = 3x^4$$

## Пример 6

*Более сложный пример*

Упростите выражение:

$$15a^8 : 3a^5$$

$15 : 3 = 5$, $a^8 : a^5 = a^{8-5} = a^3$
Результат: $5a^3$

## Пример 7

*Случай, когда показатели равны*

Вычислите:

$$5^4 : 5^4$$

По правилу: $5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0$

Что такое $5^0$? Мы пока не изучали степень с нулевым показателем. Об этом будет отдельная глава. А пока запомним: любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно 1.

Таким образом, $5^4 : 5^4 = 1$ (что логично, так как число делится само на себя).

## Пример 8

*Важное предупреждение*

Не путайте деление степеней с умножением:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ — показатели складываем
- $a^n : a^m = a^{n-m}$ — показатели вычитаем

Также помните, что основание не должно равняться нулю (на ноль делить нельзя).

# Задачи

**1.** Представьте в виде степени:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** $2^5 : 2^3$ | **4)** $7^8 : 7^5$ | **7)** $6^5 : 6^2$ | **10)** $11^6 : 11^4$ |
| **2)** $3^7 : 3^4$ | **5)** $10^7 : 10^3$ | **8)** $8^7 : 8^3$ | **11)** $12^5 : 12^3$ |
| **3)** $5^6 : 5^2$ | **6)** $4^9 : 4^4$ | **9)** $9^8 : 9^5$ | **12)** $15^7 : 15^4$ |

**2.** Представьте в виде степени:

| | | |
|---|---|---|
| **1)** $x^7 : x^4$ | **5)** $c^6 : c^2$ | **9)** $p^9 : p^8$ |
| **2)** $y^8 : y^3$ | **6)** $d^5 : d^1$ | **10)** $q^{12} : q^5$ |
| **3)** $a^9 : a^5$ | **7)** $m^8 : m^6$ | **11)** $r^6 : r^3$ |
| **4)** $b^{10} : b^7$ | **8)** $n^7 : n^4$ | **12)** $s^8 : s^4$ |

**3.** Упростите выражение:

**1)** $2x^5 : x^3$

**2)** $4a^7 : 2a^4$

**3)** $6b^8 : 3b^5$

**4)** $10y^6 : 5y^2$

**5)** $12c^9 : 4c^6$

**6)** $15m^7 : 5m^3$

**7)** $18n^8 : 6n^5$

**8)** $20p^9 : 5p^4$

**9)** $24q^7 : 8q^3$

**10)** $(-2)^5 : (-2)^2$

**11)** $(-3)^7 : (-3)^4$

**12)** $(-5)^6 : (-5)^3$

**4.** Вычислите значение выражения:

**1)** $2^5 : 2^3$

**2)** $3^6 : 3^4$

**3)** $5^7 : 5^5$

**4)** $4^8 : 4^6$

**5)** $10^6 : 10^4$

**6)** $7^5 : 7^3$

**7)** $(-2)^6 : (-2)^4$

**8)** $(-3)^5 : (-3)^3$

**9)** $2^4 \cdot 2^3 : 2^5$

**10)** $3^5 : 3^2 \cdot 3^4$

**5.** Найдите значение выражения (смешанные операции):

**1)** $2^3 \cdot 2^4 : 2^2$

**2)** $3^5 : 3^2 \cdot 3^3$

**3)** $5^4 \cdot 5^3 : 5^5$

**4)** $4^7 : 4^3 \cdot 4^2$

**5)** $10^6 \cdot 10^2 : 10^5$

**6)** $7^8 : 7^4 \cdot 7^3$

**7)** $(-2)^5 \cdot (-2)^3 : (-2)^4$

**8)** $(-3)^7 : (-3)^4 \cdot (-3)^2$

**6.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $2^5 : 2^3 = 2^{15}$

**2)** $3^7 : 3^4 = 3^3$

**3)** $x^8 : x^3 = x^{11}$

**4)** $a^9 : a^5 = a^4$

**5)** $10^6 : 10^2 = 10^3$

**6)** $y^7 : y^2 = y^5$

# Возведение степени в степень

## Теория

В этой главе мы научимся возводить степень в степень. Это третье важное свойство степеней.

**Запомните правило:**

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ — основание степени (любое число)
- $n$ и $m$ — натуральные показатели (1, 2, 3, ...)
- При возведении степени в степень показатели перемножаются

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2\cdot 3} = a^6$.

**Важно!** Это правило работает для любых степеней, но пока мы рассматриваем натуральные показатели.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Возведение степени в степень*

Вычислите:

$$(2^3)^2$$

По правилу: $(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$

Проверим: $2^3 = 8$, $8^2 = 64$ — всё верно.

## Пример 2

*Возведение степени в степень*

Вычислите:

$$(3^2)^4$$

$(3^2)^4 = 3^{2\cdot 4} = 3^8 = 6561$

## Пример 3

*Степень с буквенным основанием*

Упростите выражение:

$$(x^5)^3$$

$(x^5)^3 = x^{5\cdot 3} = x^{15}$

## Пример 4

*Отрицательное основание*

Вычислите:

$$((-2)^3)^2$$

Сначала применяем правило: $((-2)^3)^2 = (-2)^{3\cdot 2} = (-2)^6 = 64$

Так как показатель чётный, результат положительный.

## Пример 5

*Несколько степеней подряд*

Упростите выражение:

$$((a^2)^3)^4$$

Применяем правило последовательно: $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3} = a^6$, затем $(a^6)^4 = a^{6\cdot 4} = a^{24}$
Или сразу перемножаем все показатели: $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, получаем $a^{24}$

## Пример 6

*Степень произведения*

Упростите выражение:

$$(2x^3)^4$$

Здесь в степень возводится произведение. Вспоминаем: $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
$(2x^3)^4 = 2^4 \cdot (x^3)^4 = 16 \cdot x^{3\cdot 4} = 16x^{12}$

## Пример 7

*Степень частного*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4$$

Вспоминаем: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4 = \frac{(a^2)^4}{(b^3)^4} = \frac{a^{2\cdot 4}}{b^{3\cdot 4}} = \frac{a^8}{b^{12}}$

## Пример 8

*Смешанный пример*

Упростите выражение:

$$(3a^4b^2)^3$$

$(3a^4b^2)^3 = 3^3 \cdot (a^4)^3 \cdot (b^2)^3 = 27 \cdot a^{12} \cdot b^6 = 27a^{12}b^6$

## Пример 9

*Важное предупреждение*

Не путайте возведение степени в степень с умножением степеней:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ — показатели складываем
- $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$ — показатели перемножаем

Например, $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$, а $(2^3)^4 = 2^{12}$. Это разные вещи!

# Задачи

**1.** Представьте в виде степени:

**1)** $(2^3)^2$ **4)** $(7^2)^5$ **7)** $(6^3)^3$ **10)** $(11^3)^3$

**2)** $(3^2)^4$ **5)** $(10^3)^4$ **8)** $(8^2)^6$ **11)** $(12^2)^4$

**3)** $(5^4)^3$ **6)** $(4^5)^2$ **9)** $(9^4)^2$ **12)** $(15^3)^2$

**2.** Представьте в виде степени:

**1)** $(x^4)^3$ **3)** $(a^6)^4$ **5)** $(c^7)^2$

**2)** $(y^5)^2$ **4)** $(b^3)^5$ **6)** $(d^4)^4$

7) $((x^2)^3)^4$

8) $((a^3)^2)^5$

9) $((y^4)^3)^2$

10) $((b^5)^2)^3$

11) $((c^3)^4)^2$

12) $((d^2)^5)^3$

**3.** Упростите выражение:

1) $(2x^3)^2$

2) $(3a^4)^3$

3) $(4b^2)^4$

4) $(5y^5)^2$

5) $(2a^3b^2)^3$

6) $(3x^2y^4)^2$

7) $(4m^3n^5)^2$

8) $(5p^2q^3)^3$

9) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^4$

10) $\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^2$

11) $\left(\frac{2x^2}{y^3}\right)^3$

12) $\left(\frac{3a^3}{b^2}\right)^4$

**4.** Вычислите значение выражения:

1) $(2^2)^3$

2) $(3^2)^2$

3) $(5^2)^3$

4) $(4^3)^2$

5) $((-2)^3)^2$

6) $((-3)^2)^3$

7) $(2^3 \cdot 3^2)^2$

8) $((2^2)^3)^2$

**5.** Сравните (поставьте знак $>$, $<$ или $=$):

1) $(2^3)^4$ и $2^7$

2) $(3^2)^3$ и $3^5$

3) $2^3 \cdot 2^4$ и $(2^3)^4$

4) $3^2 \cdot 3^3$ и $(3^2)^3$

5) $(a^2)^3$ и $a^5$

6) $(a^3)^4$ и $a^{12}$

**6.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $(2^3)^2 = 2^5$

2) $(3^2)^4 = 3^8$

3) $(x^4)^3 = x^7$

4) $(a^5)^2 = a^{10}$

5) $(2x^3)^2 = 2x^6$

6) $(3a^2)^3 = 27a^6$

# Степень произведения и частного

## Теория

В этой главе мы научимся возводить в степень произведение и частное. Это очень важные свойства, которые часто используются при упрощении выражений.

**Запомните правила:**

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ и $b$ — любые числа (во втором случае $b \neq 0$)
- $n$ — натуральный показатель степени
- При возведении произведения в степень каждый множитель возводится в эту степень
- При возведении дроби в степень числитель и знаменатель возводятся в эту степень отдельно

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $(ab)^3 = (ab)(ab)(ab) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^3b^3$

Аналогично для дроби: $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Произведение в степени*

Вычислите:

$$(2 \cdot 3)^4$$

По правилу: $(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$

Проверим: $2 \cdot 3 = 6$, $6^4 = 1296$ — всё верно.

## Пример 2

*Произведение с буквами*

Упростите выражение:

$$(xy)^5$$

$(xy)^5 = x^5 \cdot y^5$

## Пример 3

*Произведение трёх множителей*

Упростите выражение:

$$(abc)^4$$

$(abc)^4 = a^4 \cdot b^4 \cdot c^4$

## Пример 4

*Произведение с коэффициентом*

Упростите выражение:

$$(2x)^3$$

$(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

## Пример 5

*Более сложный пример*

Упростите выражение:

$$(3a^2b)^4$$

Сначала возводим в степень каждый множитель:

$$(3a^2b)^4 = 3^4 \cdot (a^2)^4 \cdot b^4 = 81 \cdot a^8 \cdot b^4 = 81a^8b^4$$

## Пример 6

*Дробь в степени*

Вычислите:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

## Пример 7

*Дробь с буквами*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 = \frac{x^5}{y^5}$$

## Пример 8

*Дробь с коэффициентами*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^3$$

$$\left(\frac{2x}{3y}\right)^3 = \frac{(2x)^3}{(3y)^3} = \frac{8x^3}{27y^3}$$

## Пример 9

*Смешанный пример*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{2a^3}{b^2}\right)^4$$

$$\left(\frac{2a^3}{b^2}\right)^4 = \frac{2^4 \cdot (a^3)^4}{(b^2)^4} = \frac{16 \cdot a^{12}}{b^8} = \frac{16a^{12}}{b^8}$$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Не путайте $(a+b)^n$ и $a^n + b^n$! Правило работает только для произведения и частного, но не для суммы. Например, $(2+3)^2 = 5^2 = 25$, а $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ — это разные числа.

# Задачи

**1.** Представьте в виде произведения степеней:

1) $(2\cdot3)^4$

2) $(5\cdot4)^3$

3) $(7\cdot2)^5$

4) $(3\cdot6)^2$

5) $(ab)^3$

6) $(xy)^4$

7) $(mn)^5$

8) $(pq)^6$

9) $(2x)^3$

10) $(3y)^4$

11) $(5a)^2$

12) $(4b)^5$

**2.** Упростите выражение:

1) $(2a)^4$

2) $(3b)^3$

3) $(4x)^2$

4) $(5y)^5$

5) $(2x^2)^3$

6) $(3a^3)^2$

7) $(4b^4)^3$

8) $(5c^2)^4$

9) $(2a^2b)^3$

10) $(3xy^2)^4$

11) $(4x^2y^3)^2$

12) $(5a^3b^2)^3$

**3.** Представьте в виде дроби:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$

3) $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

4) $\left(\frac{7}{3}\right)^5$

5) $\left(\frac{x}{y}\right)^3$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^4$

7) $\left(\frac{m}{n}\right)^5$

8) $\left(\frac{p}{q}\right)^2$

9) $\left(\frac{2x}{3}\right)^3$

10) $\left(\frac{3a}{4}\right)^2$

11) $\left(\frac{5b}{2}\right)^4$

12) $\left(\frac{4y}{3}\right)^5$

**4.** Упростите выражение:

1) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3$

2) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^4$

3) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2$

4) $\left(\frac{2a}{b}\right)^3$

5) $\left(\frac{3x^2}{y}\right)^4$

6) $\left(\frac{2a^3}{b^2}\right)^5$

7) $\left(\frac{4x^2}{3y}\right)^2$

8) $\left(\frac{5a^3}{2b^2}\right)^3$

9) $\left(\frac{2x^2y}{3z}\right)^4$

**5.** Вычислите значение выражения:

1) $(2\cdot5)^2$

2) $(3\cdot4)^3$

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

4) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$

5) $(2x)^3$ при $x = 3$

6) $(3a)^2$ при $a = 2$

7) $\left(\frac{2x}{3}\right)^2$ при $x = 6$

8) $\left(\frac{3a}{4}\right)^3$ при $a = 2$

**6.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $(2a)^3 = 2a^3$

2) $(3x)^2 = 9x^2$

3) $(ab)^4 = a^4b^4$

4) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

6) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

# Практика по блоку 1

## Теория

В этом блоке мы изучили основные свойства степеней с натуральным показателем:

- **Определение степени:** $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$
- **Умножение степеней:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- **Деление степеней:** $a^n : a^m = a^{n-m}$ (при $n > m$)
- **Возведение степени в степень:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
- **Степень произведения:** $(ab)^n = a^n b^n$
- **Степень частного:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

В этой главе собраны задачи на все эти правила вперемешку. Ваша задача — вспомнить нужное свойство и правильно его применить.

## Задачи

**1.** Вычислите:

**1)** $2^3$ **4)** $4^3$ **7)** $7^3$ **10)** $(-3)^2$

**2)** $3^4$ **5)** $2^5$ **8)** $8^2$ **11)** $(-4)^3$

**3)** $5^2$ **6)** $6^2$ **9)** $(-2)^3$ **12)** $(-5)^2$

**2.** Представьте в виде степени:

**1)** $2^3 \cdot 2^4$ **4)** $7^5 \cdot 7^2$ **7)** $5^8 : 5^5$ **10)** $(3^2)^4$

**2)** $3^2 \cdot 3^5$ **5)** $2^6 : 2^3$ **8)** $4^9 : 4^6$ **11)** $(5^3)^3$

**3)** $5^4 \cdot 5^3$ **6)** $3^7 : 3^4$ **9)** $(2^3)^2$ **12)** $(4^2)^5$

**3.** Представьте в виде степени:

**1)** $x^3 \cdot x^4$ **5)** $c^8 : c^5$ **9)** $(a^3)^5$

**2)** $y^5 \cdot y^2$ **6)** $d^9 : d^4$ **10)** $(2x)^3$

**3)** $a^7 \cdot a^3$ **7)** $(x^2)^3$ **11)** $(3a)^2$

**4)** $b^6 : b^2$ **8)** $(y^4)^2$ **12)** $(4b)^4$

**4.** Упростите выражение:

**1)** $2x^3 \cdot 3x^4$ **5)** $12x^6 : 4x^2$ **9)** $(2x^3)^2$

**2)** $4a^2 \cdot 5a^3$ **6)** $15a^7 : 3a^4$ **10)** $(3a^2)^3$

**3)** $6b^5 \cdot 2b^2$ **7)** $18b^5 : 6b^2$ **11)** $(4b^4)^2$

**4)** $8y^4 \cdot 3y^3$ **8)** $20c^8 : 5c^3$ **12)** $(5y^3)^3$

**5.** Упростите выражение:

1) $(2x^2y)^3$

2) $(3a^3b^2)^2$

3) $(4xy^3)^4$

4) $(5a^2b^3)^2$

5) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^3$

6) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^4$

7) $\left(\frac{2x}{y}\right)^3$

8) $\left(\frac{3a^2}{b}\right)^2$

9) $\left(\frac{2x^3}{3y^2}\right)^4$

10) $\left(\frac{4a^2}{5b^3}\right)^2$

11) $\left(\frac{x^2y}{z}\right)^3$

12) $\left(\frac{2ab^2}{3c}\right)^4$

**6.** Вычислите значение выражения:

1) $2^3 \cdot 2^4$

2) $3^5 : 3^2$

3) $(2^3)^2$

4) $(2 \cdot 3)^3$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

6) $2^3 \cdot 2^4 : 2^2$

7) $(2^2 \cdot 3)^3$

8) $\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^2$

9) $(-2)^3 \cdot (-2)^2$

10) $((-2)^2)^3$

11) $(-2 \cdot 3)^2$

12) $\left(\frac{-2}{3}\right)^3$

**7.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $2x^3$ при $x = 2$

2) $3x^2$ при $x = 5$

3) $(2x)^3$ при $x = 3$

4) $(3x)^2$ при $x = 2$

5) $x^3 \cdot x^2$ при $x = 2$

6) $x^5 : x^3$ при $x = 3$

7) $(x^2)^3$ при $x = 2$

8) $(2x^2)^3$ при $x = 1$

9) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$ при $x = 4$

10) $\left(\frac{2x}{3}\right)^2$ при $x = 3$

**8.** Сравните (поставьте знак $>$, $<$ или $=$):

1) $2^3 \cdot 2^4$ и $2^7$

2) $3^5 : 3^2$ и $3^3$

3) $(2^3)^2$ и $2^5$

4) $2^3 \cdot 3^2$ и $(2 \cdot 3)^3$

5) $(-2)^4$ и $2^4$

6) $(-2)^3$ и $-2^3$

7) $(2+3)^2$ и $2^2 + 3^2$

8) $(2 \cdot 3)^2$ и $2^2 \cdot 3^2$

**9.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^3 \cdot 2^4 = 2^{12}$

2) $3^5 : 3^2 = 3^3$

3) $(2^3)^2 = 2^5$

4) $(2a)^3 = 2a^3$

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{6}$

6) $(-2)^4 = -16$

# Степень с нулевым показателем

## Теория

В этой главе мы узнаем, что такое степень с нулевым показателем. Это важное понятие, которое расширяет наши представления о степенях.

**Запомните правило:**

$$a^0 = 1$$

при условии, что $a \neq 0$.

Что означают эти буквы?

- $a$ — основание степени (любое число, кроме нуля)
- $a^0$ — степень с нулевым показателем
- Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно единице

**Почему это так?** Рассмотрим деление степеней с одинаковым основанием:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0$$

С другой стороны, $a^n : a^n = 1$ (любое число, делённое само на себя, равно 1).

Значит, $a^0 = 1$.

**Важно!** Выражение $0^0$ не определено (это особый случай, который мы не рассматриваем).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Нулевая степень числа*

Вычислите:

$$2^0$$

По правилу: $2^0 = 1$

## Пример 2

*Нулевая степень отрицательного числа*

Вычислите:

$$(-3)^0$$

Любое число (кроме нуля) в нулевой степени равно 1, поэтому:

$$(-3)^0 = 1$$

## Пример 3

*Нулевая степень дроби*

Вычислите:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

## Пример 4

*Выражение с нулевой степенью*

Упростите выражение:

$$5^0 + 2^0$$

$5^0 = 1$, $2^0 = 1$, поэтому:

$$5^0 + 2^0 = 1 + 1 = 2$$

## Пример 5

*Произведение со степенями*

Упростите выражение:

$$2^3 \cdot 2^0$$

$2^3 = 8$, $2^0 = 1$, поэтому:

$$2^3 \cdot 2^0 = 8 \cdot 1 = 8$$

Можно также применить правило умножения степеней: $2^3 \cdot 2^0 = 2^{3+0} = 2^3 = 8$

## Пример 6

*Деление со степенями*

Упростите выражение:

$$5^4 : 5^0$$

$5^4 : 5^0 = 5^{4-0} = 5^4 = 625$
Или: $5^4 : 1 = 625$

## Пример 7

*Выражение с переменной*

Упростите выражение:

$$x^5 \cdot x^0$$

$x^5 \cdot x^0 = x^{5+0} = x^5$

## Пример 8

*Степень произведения*

Упростите выражение:

$$(2x)^0$$

$(2x)^0 = 1$ (при условии $x \neq 0$)

## Пример 9

*Степень дроби*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^0$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1$ (при условии $x \neq 0, y \neq 0$)

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Помните, что $0^0$ не определено! Например, выражение $0^0$ не имеет смысла.
Также не путайте: $a^0 = 1$, но $0^a = 0$ (при $a > 0$). Это разные вещи.

# Задачи

**1.** Вычислите:

1) $2^0$
2) $3^0$
3) $5^0$
4) $10^0$
5) $(-2)^0$
6) $(-3)^0$
7) $(-5)^0$
8) $(-10)^0$
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$
10) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$
11) $\left(\frac{3}{4}\right)^0$
12) $\left(\frac{5}{7}\right)^0$

**2.** Вычислите:

1) $2^3 \cdot 2^0$
2) $3^4 \cdot 3^0$
3) $5^2 \cdot 5^0$
4) $7^5 \cdot 7^0$
5) $4^6 : 4^0$
6) $6^3 : 6^0$
7) $8^4 : 8^0$
8) $9^5 : 9^0$
9) $(2^3)^0$
10) $(3^4)^0$
11) $(5^2)^0$
12) $(7^3)^0$

**3.** Упростите выражение:

1) $x^3 \cdot x^0$
2) $y^5 \cdot y^0$
3) $a^7 \cdot a^0$
4) $b^4 \cdot b^0$
5) $c^6 : c^0$
6) $d^8 : d^0$
7) $m^5 : m^0$
8) $n^9 : n^0$
9) $(x^2)^0$
10) $(y^3)^0$
11) $(a^4)^0$
12) $(b^5)^0$

**4.** Вычислите значение выражения:

1) $2^0 + 3^0$
2) $5^0 - 2^0$
3) $2^3 + 2^0$
4) $3^4 - 3^0$
5) $2^3 \cdot 2^0 + 5^0$
6) $4^2 \cdot 4^0 - 3^0$
7) $(2^3)^0 + (3^2)^0$
8) $(5^2)^0 - (2^5)^0$
9) $2^0 \cdot 3^0 \cdot 4^0$
10) $10^0 + 100^0 + 1000^0$

**5.** Упростите выражение (считаем, что переменные не равны нулю):

1) $(2x)^0$
2) $(3y)^0$
3) $(5a^2)^0$
4) $(2x^3y)^0$
5) $\left(\frac{x}{y}\right)^0$
6) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^0$
7) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^0$
8) $\left(\frac{2x^3}{5y^2}\right)^0$
9) $x^0 \cdot y^0$
10) $x^3 \cdot y^0 \cdot z^5$
11) $(x^2y^3)^0 \cdot x^4$
12) $\frac{x^5 \cdot y^0}{x^2}$

**6.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^0 = 0$
2) $(-3)^0 = -1$
3) $5^0 = 1$
4) $0^0 = 1$
5) $x^0 = 1$ (при любом $x$)
6) $(2x)^0 = 2x^0$

# Степень с отрицательным целым показателем

## Теория

В этой главе мы узнаем, что такое степень с отрицательным показателем. Это очень важное понятие, которое позволяет записывать дроби в компактном виде.

**Запомните правило:**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

где $a \neq 0$, $n$ — натуральное число.

Что означают эти буквы?

- $a$ — основание степени (любое число, кроме нуля)
- $n$ — натуральное число (1, 2, 3, ...)
- $a^{-n}$ — степень с отрицательным показателем
- Степень с отрицательным показателем равна единице, делённой на ту же степень с положительным показателем

**Почему это так?** Рассмотрим деление степеней: $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$

С другой стороны, $a^2 : a^5 = \frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$

Значит, $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

**Важно!** Основание не может быть равно нулю (на ноль делить нельзя).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Отрицательная степень числа*

Вычислите:

$$2^{-3}$$

По правилу: $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

## Пример 2

*Отрицательная степень дроби*

Вычислите:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{(1/2)^3} = \frac{1}{1/8} = 8$

Можно также запомнить: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$

В нашем случае: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^{3} = 8$

## Пример 3

*Отрицательная степень отрицательного числа*

Вычислите:

$$(-2)^{-3}$$

$(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

## Пример 4

*Произведение со степенями*

Упростите выражение:

$$2^3 \cdot 2^{-2}$$

Применяем правило умножения степеней: $2^3 \cdot 2^{-2} = 2^{3+(-2)} = 2^1 = 2$

Проверим: $2^3 = 8$, $2^{-2} = \frac{1}{4}$, $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$

## Пример 5

*Деление со степенями*

Упростите выражение:

$$5^2 : 5^{-3}$$

$5^2 : 5^{-3} = 5^{2-(-3)} = 5^{2+3} = 5^5 = 3125$

Проверим: $5^2 = 25$, $5^{-3} = \frac{1}{125}$, $25 : \frac{1}{125} = 25 \cdot 125 = 3125$

## Пример 6

*Возведение степени в степень*

Упростите выражение:

$$(2^{-3})^2$$

$(2^{-3})^2 = 2^{-3\cdot 2} = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

## Пример 7

*Степень произведения*

Упростите выражение:

$$(2x)^{-3}$$

$(2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{8x^3}$ (при $x \neq 0$)

## Пример 8

*Степень дроби*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$ (при $x \neq 0, y \neq 0$)

## Пример 9

*Смешанный пример*

Упростите выражение:

$$(2x^{-2})^{-3}$$

Сначала возводим в степень: $(2x^{-2})^{-3} = 2^{-3} \cdot (x^{-2})^{-3} = \frac{1}{8} \cdot x^{(-2)\cdot(-3)} = \frac{1}{8} \cdot x^6 = \frac{x^6}{8}$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Не путайте:

- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $-a^n = -(a^n)$ — это совсем другое

Например, $2^{-3} = \dfrac{1}{8}$, а $-2^3 = -8$.

# Задачи

**1.** Представьте в виде дроби:

**1)** $2^{-1}$ **2)** $2^{-2}$ **3)** $2^{-3}$ **4)** $2^{-4}$ **5)** $3^{-1}$ **6)** $3^{-2}$ **7)** $3^{-3}$ **8)** $3^{-4}$ **9)** $5^{-1}$ **10)** $5^{-2}$ **11)** $10^{-1}$ **12)** $10^{-2}$

**2.** Вычислите:

**1)** $(-2)^{-1}$ **2)** $(-2)^{-2}$ **3)** $(-2)^{-3}$ **4)** $(-2)^{-4}$ **5)** $(-3)^{-1}$ **6)** $(-3)^{-2}$ **7)** $(-3)^{-3}$ **8)** $(-3)^{-4}$ **9)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ **10)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$ **11)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ **12)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$

**3.** Представьте в виде степени с отрицательным показателем:

**1)** $\dfrac{1}{2}$ **2)** $\dfrac{1}{4}$ **3)** $\dfrac{1}{8}$ **4)** $\dfrac{1}{16}$ **5)** $\dfrac{1}{3}$ **6)** $\dfrac{1}{9}$ **7)** $\dfrac{1}{27}$ **8)** $\dfrac{1}{81}$ **9)** $\dfrac{1}{x}$ **10)** $\dfrac{1}{x^2}$ **11)** $\dfrac{1}{x^3}$ **12)** $\dfrac{1}{x^5}$

**4.** Упростите выражение:

**1)** $2^3 \cdot 2^{-1}$ **2)** $3^2 \cdot 3^{-3}$ **3)** $5^4 \cdot 5^{-2}$ **4)** $2^5 : 2^{-2}$ **5)** $3^4 : 3^{-3}$ **6)** $6^2 : 6^{-4}$ **7)** $(2^{-2})^3$ **8)** $(3^{-3})^2$ **9)** $(4^{-2})^{-3}$ **10)** $(2x)^{-2}$ **11)** $(3x)^{-3}$ **12)** $(5x^2)^{-2}$

**5.** Упростите выражение:

**1)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2}$ **2)** $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3}$ **3)** $\left(\dfrac{2x}{y}\right)^{-1}$ **4)** $\left(\dfrac{3a}{b}\right)^{-2}$ **5)** $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^{-3}$ **6)** $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^{-2}$ **7)** $\left(\dfrac{2x^2}{3y}\right)^{-2}$ **8)** $\left(\dfrac{3a^3}{2b^2}\right)^{-3}$ **9)** $(2x^{-2})^{-3}$

**10)** $(3a^{-3})^{-2}$

**11)** $(2x^2y^{-1})^{-2}$

**12)** $(4a^{-2}b^3)^{-3}$

**6.** Вычислите значение выражения:

**1)** $2^{-1}+3^{-1}$

**2)** $2^{-2}+3^{-2}$

**3)** $2^{-1}\cdot 2^3$

**4)** $3^{-2}\cdot 3^4$

**5)** $2^3:2^{-2}$

**6)** $5^2:5^{-1}$

**7)** $(2^{-2})^{-1}$

**8)** $(3^{-3})^{-2}$

**9)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

**10)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

**11)** $(-2)^{-2}+(-2)^{-3}$

**12)** $(-3)^{-2}-(-3)^{-3}$

**7.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $2^{-3}=-8$

**2)** $(-2)^{-2}=\frac{1}{4}$

**3)** $3^{-1}=\frac{1}{3}$

**4)** $2^{-1}\cdot 2^{-2}=2^{-3}$

**5)** $2^3:2^{-2}=2^5$

**6)** $(2x)^{-2}=\frac{1}{2x^2}$

# Действия со степенями с целым показателем

## Теория

В этой главе мы объединим знания о степенях с натуральным, нулевым и отрицательным показателями. Все эти степени называются степенями с целым показателем.

**Напомним основные свойства:**

Для любых целых показателей $n$ и $m$ (при условии, что все выражения имеют смысл) выполняются следующие свойства:

1. **Умножение степеней:** $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. **Деление степеней:** $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. **Возведение степени в степень:** $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4. **Степень произведения:** $(ab)^n = a^n b^n$
5. **Степень частного:** $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. **Нулевая степень:** $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$)
7. **Отрицательная степень:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (при $a \neq 0$)

**Важно!** Все эти свойства работают для любых целых показателей, включая отрицательные и нуль. Главное — следить, чтобы основание не было равно нулю там, где это важно.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Умножение с отрицательными показателями*

Упростите выражение:

$$2^{-3} \cdot 2^{-2}$$

Применяем правило умножения: $2^{-3} \cdot 2^{-2} = 2^{-3+(-2)} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

## Пример 2

*Деление с отрицательными показателями*

Упростите выражение:

$$3^{-2} : 3^{-5}$$

$3^{-2} : 3^{-5} = 3^{-2-(-5)} = 3^{-2+5} = 3^3 = 27$

## Пример 3

*Возведение отрицательной степени в степень*

Упростите выражение:

$$(5^{-2})^{-3}$$

$(5^{-2})^{-3} = 5^{(-2)\cdot(-3)} = 5^6 = 15625$

## Пример 4

*Степень произведения с отрицательным показателем*

Упростите выражение:

$$(2x)^{-3}$$

$(2x)^{-3} = 2^{-3} \cdot x^{-3} = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{1}{8x^3}$

# Пример 5

*Степень дроби с отрицательным показателем*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{x}\right)^{2} = \frac{y^2}{x^2}$

# Пример 6

*Смешанный пример с числами и буквами*

Упростите выражение:

$$\frac{2a^{-3}b^2}{4a^{-5}b^{-1}}$$

Работаем отдельно с числами, отдельно с каждой буквой:
Числа: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
Буква $a$: $a^{-3} : a^{-5} = a^{-3-(-5)} = a^{-3+5} = a^2$
Буква $b$: $b^2 : b^{-1} = b^{2-(-1)} = b^{2+1} = b^3$
Получаем: $\frac{1}{2}a^2b^3 = \frac{a^2b^3}{2}$

# Пример 7

*Вычисление значения выражения*

Вычислите:

$$\frac{2^{-3} \cdot 4^2}{8^{-1}}$$

Сначала приведём всё к одному основанию (2):
$4^2 = (2^2)^2 = 2^4$
$8^{-1} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$
Подставляем: $\frac{2^{-3} \cdot 2^4}{2^{-3}} = 2^{-3} \cdot 2^4 \cdot 2^3 = 2^{-3+4+3} = 2^4 = 16$

# Пример 8

*Выражение с разными основаниями*

Упростите выражение:

$$(2x^{-2}y^3)^{-2} \cdot (3x^3y^{-1})^2$$

Возводим первую скобку в степень $-2$:
$(2x^{-2}y^3)^{-2} = 2^{-2} \cdot (x^{-2})^{-2} \cdot (y^3)^{-2} = \frac{1}{4} \cdot x^4 \cdot y^{-6}$
Возводим вторую скобку в степень 2:
$(3x^3y^{-1})^2 = 3^2 \cdot (x^3)^2 \cdot (y^{-1})^2 = 9 \cdot x^6 \cdot y^{-2}$
Перемножаем:
$\frac{1}{4} \cdot 9 \cdot x^4 \cdot x^6 \cdot y^{-6} \cdot y^{-2} = \frac{9}{4} \cdot x^{10} \cdot y^{-8} = \frac{9x^{10}}{4y^8}$

# Пример 9

*Важное предупреждение*

Помните, что свойства работают только при одинаковых основаниях. Нельзя складывать показатели у разных оснований:

$2^n \cdot 3^m$ — так и остаётся, никак не упрощается.

# Задачи

**1.** Представьте в виде степени:

1) $2^3 \cdot 2^{-1}$
2) $3^{-2} \cdot 3^5$
3) $5^{-3} \cdot 5^{-2}$
4) $7^4 \cdot 7^{-6}$
5) $2^5 : 2^{-2}$
6) $3^{-3} : 3^2$
7) $4^{-2} : 4^{-5}$
8) $6^3 : 6^{-4}$
9) $(2^{-2})^3$
10) $(3^4)^{-2}$
11) $(5^{-3})^{-2}$
12) $(7^{-2})^{-4}$

**2.** Упростите выражение:

1) $x^3 \cdot x^{-2}$
2) $x^{-4} \cdot x^7$
3) $x^{-5} \cdot x^{-3}$
4) $a^5 : a^{-2}$
5) $a^{-3} : a^4$
6) $a^{-2} : a^{-5}$
7) $(b^{-3})^2$
8) $(b^4)^{-3}$
9) $(b^{-2})^{-4}$
10) $(2x)^{-2}$
11) $(3x^2)^{-3}$
12) $(4x^{-3})^2$

**3.** Упростите выражение:

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$
2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$
3) $\left(\frac{2x}{y}\right)^{-1}$
4) $\left(\frac{3a}{b}\right)^{-2}$
5) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-3}$
6) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2}$
7) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^{-2}$
8) $\left(\frac{3a^3}{2b^2}\right)^{-3}$
9) $(2x^{-2}y^3)^{-2}$
10) $(3a^3b^{-2})^{-3}$
11) $(4x^2y^{-3})^2 \cdot (2x^{-1}y^2)^{-3}$
12) $(5a^{-2}b^3)^{-2} \cdot (2a^3b^{-1})^3$

**4.** Вычислите значение выражения:

1) $2^{-1} \cdot 2^3$
2) $3^{-2} \cdot 3^4$
3) $5^2 : 5^{-2}$
4) $4^{-3} : 4^{-1}$
5) $(2^{-2})^{-1}$
6) $(3^{-3})^{-2}$
7) $\frac{2^{-3} \cdot 4^2}{8^{-1}}$
8) $\frac{9^2 \cdot 3^{-4}}{27^{-1}}$
9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$
10) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

**5.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $2x^{-2}$ при $x = 2$
2) $3x^{-3}$ при $x = 3$
3) $(2x)^{-2}$ при $x = 1$
4) $(3x)^{-3}$ при $x = 2$
5) $x^2 \cdot x^{-3}$ при $x = 4$
6) $x^5 : x^{-2}$ при $x = 2$
7) $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-1}y^2}$ при $x = 2, y = 3$
8) $\frac{(2x)^{-2}y^3}{x^3y^{-1}}$ при $x = 1, y = 2$

**6.** Сравните (поставьте знак >, < или =):

**1)** $2^{-1}$ и $2^{-2}$

**2)** $3^{-2}$ и $3^{-3}$

**3)** $2^{-3}$ и $(-2)^{-3}$

**4)** $2^{-2}$ и $(-2)^{-2}$

**5)** $2^{3} \cdot 2^{-2}$ и $2^{1}$

**6)** $3^{2} : 3^{-1}$ и $3^{3}$

**7.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-3}$

**2)** $3^{2} : 3^{-2} = 3^{0}$

**3)** $(2^{-2})^{-3} = 2^{6}$

**4)** $(2x)^{-2} = \dfrac{1}{2x^{2}}$

**5)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2} = \dfrac{y^{2}}{x^{2}}$

**6)** $2^{-1} + 3^{-1} = 5^{-1}$

# Практика по блоку 2

## Теория

В этом блоке мы изучили степени с целым показателем:

- **Степень с нулевым показателем:** $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$)
- **Степень с отрицательным показателем:** $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (при $a \neq 0$)
- **Действия со степенями:** все свойства (умножение, деление, возведение в степень, степень произведения и частного) работают для любых целых показателей

В этой главе собраны задачи на все эти правила вперемешку. Ваша задача — вспомнить нужное свойство и правильно его применить.

## Задачи

**1.** Вычислите:

**1)** $2^0$ **2)** $3^0$ **3)** $(-5)^0$ **4)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ **5)** $2^{-1}$ **6)** $2^{-2}$ **7)** $3^{-2}$ **8)** $4^{-2}$ **9)** $(-2)^{-1}$ **10)** $(-2)^{-2}$ **11)** $(-3)^{-2}$ **12)** $(-4)^{-3}$

**2.** Представьте в виде степени:

**1)** $2^3 \cdot 2^{-1}$ **2)** $3^{-2} \cdot 3^5$ **3)** $5^{-3} \cdot 5^{-2}$ **4)** $7^4 \cdot 7^{-6}$ **5)** $2^5 : 2^{-2}$ **6)** $3^{-3} : 3^2$ **7)** $4^{-2} : 4^{-5}$ **8)** $6^3 : 6^{-4}$ **9)** $(2^{-2})^3$ **10)** $(3^4)^{-2}$ **11)** $(5^{-3})^{-2}$ **12)** $(7^{-2})^{-4}$

**3.** Представьте в виде дроби:

**1)** $x^{-2}$ **2)** $x^{-3}$ **3)** $a^{-4}$ **4)** $b^{-5}$ **5)** $(2x)^{-1}$ **6)** $(3x)^{-2}$ **7)** $(4a)^{-3}$ **8)** $(5b)^{-2}$ **9)** $2x^{-1}$ **10)** $3x^{-2}$ **11)** $4a^{-3}$ **12)** $5b^{-2}$

**4.** Представьте в виде степени с отрицательным показателем:

**1)** $\dfrac{1}{2}$ **2)** $\dfrac{1}{4}$ **3)** $\dfrac{1}{8}$ **4)** $\dfrac{1}{16}$ **5)** $\dfrac{1}{x}$ **6)** $\dfrac{1}{x^2}$ **7)** $\dfrac{1}{x^3}$ **8)** $\dfrac{1}{x^5}$ **9)** $\dfrac{1}{2x}$ **10)** $\dfrac{1}{3x^2}$ **11)** $\dfrac{1}{4a^3}$ **12)** $\dfrac{1}{5b^4}$

**5.** Упростите выражение:

**1)** $x^3 \cdot x^{-2}$ **2)** $x^{-4} \cdot x^7$ **3)** $x^{-5} \cdot x^{-3}$ **4)** $a^5 : a^{-2}$ **5)** $a^{-3} : a^4$ **6)** $a^{-2} : a^{-5}$

7) $(b^{-3})^2$

8) $(b^4)^{-3}$

9) $(b^{-2})^{-4}$

10) $(2x)^{-2}$

11) $(3x^2)^{-3}$

12) $(4x^{-3})^2$

**6.** Упростите выражение:

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-3}$

3) $\left(\frac{2x}{y}\right)^{-1}$

4) $\left(\frac{3a}{b}\right)^{-2}$

5) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-3}$

6) $\left(\frac{a}{b^2}\right)^{-2}$

7) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^{-2}$

8) $\left(\frac{3a^3}{2b^2}\right)^{-3}$

9) $(2x^{-2}y^3)^{-2}$

10) $(3a^3b^{-2})^{-3}$

11) $(4x^2y^{-3})^2 \cdot (2x^{-1}y^2)^{-3}$

12) $(5a^{-2}b^3)^{-2} \cdot (2a^3b^{-1})^3$

**7.** Вычислите значение выражения:

1) $2^{-1} + 3^{-1}$

2) $2^{-2} + 3^{-2}$

3) $2^{-1} \cdot 2^3$

4) $3^{-2} \cdot 3^4$

5) $2^3 : 2^{-2}$

6) $5^2 : 5^{-1}$

7) $(2^{-2})^{-1}$

8) $(3^{-3})^{-2}$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

10) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

11) $(-2)^{-2} + (-2)^{-3}$

12) $(-3)^{-2} - (-3)^{-3}$

**8.** Вычислите (приведение к одному основанию):

1) $\frac{2^{-3} \cdot 4^2}{8^{-1}}$

2) $\frac{9^2 \cdot 3^{-4}}{27^{-1}}$

3) $\frac{16^2 \cdot 2^{-5}}{4^3}$

4) $\frac{25^2 \cdot 5^{-3}}{125^{-1}}$

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

7) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}$

**9.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $2x^{-2}$ при $x = 2$

2) $3x^{-3}$ при $x = 3$

3) $(2x)^{-2}$ при $x = 1$

4) $(3x)^{-3}$ при $x = 2$

5) $x^2 \cdot x^{-3}$ при $x = 4$

6) $x^5 : x^{-2}$ при $x = 2$

7) $\frac{x^2y^{-1}}{x^{-1}y^2}$ при $x = 2, y = 3$

8) $\dfrac{(2x)^{-2}y^3}{x^3y^{-1}}$ при $x = 1, y = 2$

9) $\dfrac{x^{-2}y^3}{x^3y^{-2}}$ при $x = 2, y = 1$

10) $\dfrac{(3x)^{-2}y^{-1}}{x^{-3}y^2}$ при $x = 2, y = 1$

**10.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^0 = 0$

2) $(-3)^0 = -1$

3) $2^{-3} = -8$

4) $(-2)^{-2} = \dfrac{1}{4}$

5) $2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-3}$

6) $3^2 : 3^{-2} = 3^0$

7) $(2x)^{-2} = \dfrac{1}{2x^2}$

8) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-2} = \dfrac{x^2}{y^2}$

9) $2^{-1} + 3^{-1} = 5^{-1}$

10) $0^{-2} = 0$

# Определение арифметического корня

## Теория

В этой главе мы познакомимся с понятием арифметического корня. Это действие, обратное возведению в степень.

**Определение:** Арифметическим корнем $n$-й степени из неотрицательного числа $a$ называется неотрицательное число $b$, такое что $b^n = a$.

Обозначение:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a, \quad b \geq 0, \quad a \geq 0$$

Что означают эти буквы?

- $n$ — показатель корня (натуральное число, $n \geq 2$)
- $a$ — подкоренное выражение (число, из которого извлекаем корень)
- $\sqrt[n]{a}$ — корень $n$-й степени из $a$
- Для квадратного корня пишут $\sqrt{a}$ (без двойки)

**Важные частные случаи:**

- $\sqrt{a}$ — квадратный корень (подразумевается $n = 2$)
- $\sqrt[3]{a}$ — кубический корень
- $\sqrt[4]{a}$ — корень четвёртой степени

**Свойства:**

- Корень чётной степени ($n = 2, 4, 6, \ldots$) определён только для $a \geq 0$, и результат всегда неотрицателен
- Корень нечётной степени ($n = 3, 5, 7, \ldots$) определён для любого $a$, и результат может быть отрицательным (но мы пока рассматриваем только арифметический корень, то есть для неотрицательных чисел)

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Квадратный корень*

Вычислите:

$$\sqrt{9}$$

Ищем число $b$, такое что $b^2 = 9$ и $b \geq 0$. Это число 3, так как $3^2 = 9$.
Ответ: $\sqrt{9} = 3$.

## Пример 2

*Квадратный корень из нуля*

Вычислите:

$$\sqrt{0}$$

$0^2 = 0$, поэтому $\sqrt{0} = 0$.

## Пример 3

*Кубический корень*

Вычислите:

$$\sqrt[3]{8}$$

Ищем число $b$, такое что $b^3 = 8$. Это число 2, так как $2^3 = 8$.
Ответ: $\sqrt[3]{8} = 2$.

## Пример 4

*Корень четвёртой степени*

Вычислите:

$$\sqrt[4]{16}$$

Ищем число $b \geq 0$, такое что $b^4 = 16$. Это число 2, так как $2^4 = 16$.
Ответ: $\sqrt[4]{16} = 2$.

## Пример 5

*Корень из степени*

Вычислите:

$$\sqrt{5^2}$$

$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

Обратите внимание: $\sqrt{5^2} = 5$, а не $\pm 5$, так как корень арифметический — только неотрицательное значение.

## Пример 6

*Корень из квадрата числа*

Вычислите:

$$\sqrt{(-5)^2}$$

Сначала возводим в квадрат: $(-5)^2 = 25$, затем извлекаем корень: $\sqrt{25} = 5$.
Важно: $\sqrt{(-5)^2} = 5$, а не $-5$. Вообще, $\sqrt{a^2} = |a|$.

## Пример 7

*Корень нечётной степени из отрицательного числа (не арифметический)*

Для нечётных степеней можно извлекать корень из отрицательных чисел, но это уже не арифметический корень. Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, так как $(-2)^3 = -8$.

Но в этой главе мы работаем только с арифметическим корнем, поэтому подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

## Пример 8

*Сравнение корней*

Что больше: $\sqrt{16}$ или $\sqrt[3]{27}$?
$\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[3]{27} = 3$. Значит, $\sqrt{16} > \sqrt[3]{27}$.

## Пример 9

*Важное предупреждение*

Не путайте:

- $\sqrt{9} = 3$ (всегда одно неотрицательное число)
- Уравнение $x^2 = 9$ имеет два решения: $x = 3$ и $x = -3$

Корень — это число, а не решение уравнения!

# Задачи

**1.** Вычислите квадратный корень:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1)** $\sqrt{4}$ | **4)** $\sqrt{25}$ | **7)** $\sqrt{64}$ | **10)** $\sqrt{121}$ |
| **2)** $\sqrt{9}$ | **5)** $\sqrt{36}$ | **8)** $\sqrt{81}$ | **11)** $\sqrt{144}$ |
| **3)** $\sqrt{16}$ | **6)** $\sqrt{49}$ | **9)** $\sqrt{100}$ | **12)** $\sqrt{169}$ |

**2.** Вычислите кубический корень:

1) $\sqrt[3]{8}$
2) $\sqrt[3]{27}$
3) $\sqrt[3]{64}$
4) $\sqrt[3]{125}$
5) $\sqrt[3]{216}$
6) $\sqrt[3]{343}$
7) $\sqrt[3]{512}$
8) $\sqrt[3]{729}$
9) $\sqrt[3]{1000}$
10) $\sqrt[3]{1}$
11) $\sqrt[3]{0}$
12) $\sqrt[3]{8}$

**3.** Вычислите корень четвёртой степени:

1) $\sqrt[4]{16}$
2) $\sqrt[4]{81}$
3) $\sqrt[4]{256}$
4) $\sqrt[4]{625}$
5) $\sqrt[4]{1}$
6) $\sqrt[4]{0}$
7) $\sqrt[4]{16}$
8) $\sqrt[4]{81}$

**4.** Вычислите:

1) $\sqrt{2^2}$
2) $\sqrt{3^2}$
3) $\sqrt{4^2}$
4) $\sqrt{5^2}$
5) $\sqrt{(-2)^2}$
6) $\sqrt{(-3)^2}$
7) $\sqrt{(-4)^2}$
8) $\sqrt{(-5)^2}$
9) $\sqrt[3]{2^3}$
10) $\sqrt[3]{3^3}$
11) $\sqrt[3]{4^3}$
12) $\sqrt[3]{5^3}$

**5.** Сравните числа (поставьте знак $>$, $<$ или $=$):

1) $\sqrt{9}$ и $\sqrt{16}$
2) $\sqrt[3]{8}$ и $\sqrt[3]{27}$
3) $\sqrt{25}$ и $\sqrt[3]{125}$
4) $\sqrt[4]{16}$ и $\sqrt{4}$
5) $\sqrt{36}$ и $6$
6) $\sqrt{49}$ и $7$
7) $\sqrt{(-4)^2}$ и $4$
8) $\sqrt{(-4)^2}$ и $-4$

**6.** Найдите значение выражения:

1) $\sqrt{9}+\sqrt{16}$
2) $\sqrt{25}-\sqrt{9}$
3) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$
4) $\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt{4}$
5) $\sqrt{100}:\sqrt{25}$
6) $\sqrt[3]{64}:\sqrt[3]{8}$
7) $\sqrt{36}+\sqrt{49}-\sqrt{64}$
8) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{125}-\sqrt[3]{64}$

**7.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $\sqrt{16}=4$
2) $\sqrt{25}=\pm 5$
3) $\sqrt[3]{27}=3$
4) $\sqrt{(-3)^2}=-3$
5) $\sqrt[4]{16}=2$
6) $\sqrt{0}=0$

# Корень из произведения и частного

## Теория

В этой главе мы научимся извлекать корень из произведения и частного. Это очень важные свойства, которые позволяют упрощать выражения с корнями.

**Запомните правила:**

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ и $b$ — неотрицательные числа (для корней чётной степени)
- $n$ — показатель корня (натуральное число, $n \geq 2$)
- Корень из произведения равен произведению корней
- Корень из частного равен частному корней

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. С другой стороны, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$. Результаты совпадают.

**Важно!** Для корней чётной степени ($n = 2, 4, 6, \ldots$) числа $a$ и $b$ должны быть неотрицательными. Для корней нечётной степени это правило работает для любых чисел.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Корень из произведения*

Вычислите:

$$\sqrt{4 \cdot 25}$$

По правилу: $\sqrt{4 \cdot 25} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$

Проверим: $4 \cdot 25 = 100$, $\sqrt{100} = 10$ — всё верно.

## Пример 2

*Корень из произведения трёх чисел*

Вычислите:

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 64}$$

$\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

## Пример 3

*Корень из частного*

Вычислите:

$$\sqrt{\frac{36}{9}}$$

По правилу: $\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

Проверим: $\frac{36}{9} = 4$, $\sqrt{4} = 2$ — всё верно.

## Пример 4

*Корень из дроби с буквами*

Упростите выражение:

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$$

При условии $x \geq 0, y > 0$:

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{x}{y}$$

## Пример 5

*Корень из произведения с буквами*

Упростите выражение:

$$\sqrt{16x^2}$$

$\sqrt{16x^2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{x^2} = 4 \cdot x = 4x$ (при $x \geq 0$)

## Пример 6

*Корень из произведения степеней*

Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{a^3b^6}$$

$\sqrt[3]{a^3b^6} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{b^6} = a \cdot b^2$

## Пример 7

*Корень из частного со степенями*

Упростите выражение:

$$\sqrt{\frac{a^4}{b^2}}$$

$\sqrt{\frac{a^4}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a^2}{b}$ (при $a \geq 0, b > 0$)

## Пример 8

*Смешанный пример*

Упростите выражение:

$$\sqrt{18}$$

Представим 18 как произведение: $18 = 9 \cdot 2$
$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

## Пример 9

*Ещё один пример*

Упростите выражение:

$$\sqrt{50}$$

$50 = 25 \cdot 2$, поэтому $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Эти правила работают только для произведения и частного. Для суммы или разности подобных свойств нет!

Например, $\sqrt{a+b}$ не равно $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Проверим: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, а $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ — это разные числа.

# Задачи

**1.** Вычислите, используя свойство корня из произведения:

1) $\sqrt{4\cdot 9}$
2) $\sqrt{16\cdot 25}$
3) $\sqrt{36\cdot 49}$
4) $\sqrt{64\cdot 81}$
5) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$
6) $\sqrt[3]{27\cdot 64}$
7) $\sqrt[3]{125\cdot 216}$
8) $\sqrt[3]{343\cdot 512}$
9) $\sqrt{4\cdot 9\cdot 25}$
10) $\sqrt{16\cdot 9\cdot 4}$
11) $\sqrt[3]{8\cdot 27\cdot 64}$
12) $\sqrt[3]{27\cdot 125\cdot 216}$

**2.** Вычислите, используя свойство корня из частного:

1) $\sqrt{\frac{36}{9}}$
2) $\sqrt{\frac{64}{16}}$
3) $\sqrt{\frac{100}{25}}$
4) $\sqrt{\frac{144}{36}}$
5) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$
6) $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$
7) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$
8) $\sqrt[3]{\frac{216}{125}}$
9) $\sqrt{\frac{49}{4}}$
10) $\sqrt{\frac{81}{9}}$
11) $\sqrt[3]{\frac{512}{343}}$
12) $\sqrt[3]{\frac{729}{512}}$

**3.** Упростите выражение (считаем переменные неотрицательными):

1) $\sqrt{4x^2}$
2) $\sqrt{9a^2}$
3) $\sqrt{16b^2}$
4) $\sqrt{25x^4}$
5) $\sqrt{36a^6}$
6) $\sqrt{49b^8}$
7) $\sqrt[3]{8x^3}$
8) $\sqrt[3]{27a^6}$
9) $\sqrt[3]{64b^9}$
10) $\sqrt[4]{16x^4}$
11) $\sqrt[4]{81a^8}$
12) $\sqrt[4]{256b^{12}}$

**4.** Упростите выражение:

1) $\sqrt{x^2y^2}$
2) $\sqrt{a^4b^6}$
3) $\sqrt{x^6y^4}$
4) $\sqrt[3]{x^3y^6}$
5) $\sqrt[3]{a^6b^9}$
6) $\sqrt[3]{x^9y^{12}}$
7) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}}$
8) $\sqrt{\frac{a^4}{b^2}}$
9) $\sqrt{\frac{x^6}{y^4}}$
10) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^6}}$
11) $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$
12) $\sqrt[3]{\frac{x^9}{y^{12}}}$

**5.** Вынесите множитель из-под знака корня (представьте в виде $a\sqrt{b}$):

1) $\sqrt{8}$
2) $\sqrt{12}$
3) $\sqrt{18}$
4) $\sqrt{20}$
5) $\sqrt{27}$
6) $\sqrt{32}$
7) $\sqrt{45}$
8) $\sqrt{50}$
9) $\sqrt{72}$
10) $\sqrt{98}$
11) $\sqrt{108}$
12) $\sqrt{128}$

**6.** Вынесите множитель из-под знака кубического корня:

1) $\sqrt[3]{16}$
2) $\sqrt[3]{24}$
3) $\sqrt[3]{54}$
4) $\sqrt[3]{81}$
5) $\sqrt[3]{108}$
6) $\sqrt[3]{128}$
7) $\sqrt[3]{250}$
8) $\sqrt[3]{375}$
9) $\sqrt[3]{432}$

**7.** Вычислите значение выражения:

1) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

2) $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$

3) $\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}}$

4) $\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{16}}$

5) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

6) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

7) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$

8) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$

9) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

10) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

11) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

12) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$

2) $\sqrt{16 + 9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

3) $\sqrt{\dfrac{36}{4}} = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}}$

4) $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$

5) $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

6) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

# Возведение корня в степень и извлечение корня из степени

## Теория

В этой главе мы научимся возводить корень в степень и извлекать корень из степени. Эти свойства тесно связаны между собой.

**Запомните правила:**

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Что означают эти буквы?

- $a$ — неотрицательное число (для корней чётной степени)
- $n, m, k$ — натуральные числа
- При возведении корня в степень можно сначала возвести в степень подкоренное выражение, а потом извлечь корень
- При извлечении корня из корня показатели корней перемножаются

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $(\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$. С другой стороны, $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$. Результаты совпадают.

Для корня из корня: $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$. С другой стороны, $\sqrt[4]{16} = 2$.

**Важно!** Все эти свойства работают для неотрицательных подкоренных выражений (для корней чётной степени).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Возведение корня в степень*

Вычислите:

$$(\sqrt{5})^2$$

По правилу: $(\sqrt{5})^2 = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$

Это важный частный случай: квадрат корня равен подкоренному выражению.

## Пример 2

*Возведение корня в степень*

Вычислите:

$$(\sqrt[3]{2})^3$$

$(\sqrt[3]{2})^3 = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2$

Аналогично: $(\sqrt[n]{a})^n = a$

## Пример 3

*Возведение корня в степень*

Вычислите:

$$(\sqrt{3})^4$$

$(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{81} = 9$

Или: $(\sqrt{3})^4 = ((\sqrt{3})^2)^2 = 3^2 = 9$

## Пример 4

*Возведение корня в степень с буквами*

Упростите выражение:

$$(\sqrt{x})^6$$

$(\sqrt{x})^6 = \sqrt{x^6} = x^3$ (при $x \geq 0$)

## Пример 5

*Корень из корня*

Вычислите:

$$\sqrt{\sqrt{16}}$$

$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[4]{16} = 2$

## Пример 6

*Корень из корня с буквами*

Упростите выражение:

$$\sqrt{\sqrt{x}}$$

$\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$ (при $x \geq 0$)

## Пример 7

*Несколько корней подряд*

Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}$$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3\cdot4]{a} = \sqrt[12]{a}$

## Пример 8

*Смешанный пример*

Упростите выражение:

$$(\sqrt[3]{x^2})^6$$

Сначала возводим корень в степень: $(\sqrt[3]{x^2})^6 = \sqrt[3]{x^{2\cdot6}} = \sqrt[3]{x^{12}} = x^{12/3} = x^4$
Или можно по-другому: $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, тогда $(x^{2/3})^6 = x^{(2/3)\cdot6} = x^4$

## Пример 9

*Ещё один пример*

Упростите выражение:

$$\sqrt{a\sqrt{a}}$$

Запишем внутренний корень как степень: $\sqrt{a} = a^{1/2}$, тогда $a \cdot a^{1/2} = a^{3/2}$
Извлекаем корень: $\sqrt{a^{3/2}} = (a^{3/2})^{1/2} = a^{3/4}$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Помните, что $(\sqrt{a})^2 = a$ только для $a \geq 0$. Для отрицательных чисел это не работает, так как квадратный корень из отрицательного числа не определён в действительных числах.

# Задачи

**1.** Вычислите:

1) $(\sqrt{2})^2$

2) $(\sqrt{3})^2$

3) $(\sqrt{5})^2$

4) $(\sqrt{7})^2$

5) $(\sqrt[3]{2})^3$

6) $(\sqrt[3]{3})^3$

7) $(\sqrt[3]{4})^3$

8) $(\sqrt[3]{5})^3$

9) $(\sqrt{2})^4$

10) $(\sqrt{3})^4$

11) $(\sqrt{5})^4$

12) $(\sqrt{6})^4$

**2.** Вычислите:

1) $\sqrt{\sqrt{81}}$

2) $\sqrt{\sqrt{256}}$

3) $\sqrt{\sqrt{625}}$

4) $\sqrt{\sqrt{1296}}$

5) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

6) $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$

7) $\sqrt{\sqrt[3]{27}}$

8) $\sqrt{\sqrt[3]{125}}$

9) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{27}}$

10) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}$

11) $\sqrt[4]{\sqrt{16}}$

12) $\sqrt[4]{\sqrt{81}}$

**3.** Упростите выражение (считаем переменные неотрицательными):

1) $(\sqrt{x})^2$

2) $(\sqrt{x})^4$

3) $(\sqrt{x})^6$

4) $(\sqrt[3]{x})^3$

5) $(\sqrt[3]{x})^6$

6) $(\sqrt[3]{x})^9$

7) $(\sqrt[4]{x})^4$

8) $(\sqrt[4]{x})^8$

9) $(\sqrt[4]{x})^{12}$

10) $\sqrt{\sqrt{x}}$

11) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$

12) $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$

**4.** Упростите выражение:

1) $\sqrt{x^2}$

2) $\sqrt{x^4}$

3) $\sqrt{x^6}$

4) $\sqrt[3]{x^3}$

5) $\sqrt[3]{x^6}$

6) $\sqrt[3]{x^9}$

7) $\sqrt[4]{x^4}$

8) $\sqrt[4]{x^8}$

9) $\sqrt[4]{x^{12}}$

10) $\sqrt{x^2y^4}$

11) $\sqrt[3]{x^6y^9}$

12) $\sqrt[4]{x^4y^8}$

**5.** Представьте в виде корня:

1) $x^{1/2}$

2) $x^{1/3}$

3) $x^{1/4}$

4) $x^{2/3}$

5) $x^{3/4}$

6) $x^{5/2}$

7) $x^{3/2}$

8) $x^{2/5}$

9) $x^{3/5}$

10) $a^{1/2}b^{1/3}$

11) $x^{2/3}y^{1/2}$

12) $a^{3/4}b^{1/2}c^{1/3}$

**6.** Упростите выражение (используя степень с дробным показателем):

1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

2) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

3) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

4) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

5) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

6) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$

7) $(\sqrt{x})^3 \cdot \sqrt{x}$

8) $(\sqrt[3]{x})^2 \cdot \sqrt[3]{x}$

9) $(\sqrt[4]{x})^3 \cdot \sqrt[4]{x}$

10) $\sqrt{x\sqrt{x}}$

11) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

12) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

**7.** Вычислите значение выражения:

1) $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2$

2) $(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{4})^2$

3) $(\sqrt[3]{2})^3 \cdot (\sqrt[3]{3})^3$

4) $(\sqrt[3]{4})^3 : (\sqrt[3]{2})^3$

5) $\sqrt{\sqrt{16}} + \sqrt{\sqrt{81}}$

6) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{125}}$

7) $\sqrt{2\sqrt{4}}$

8) $\sqrt[3]{3\sqrt{27}}$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $(\sqrt{3})^2 = 3$

2) $(\sqrt{4})^3 = 8$

3) $\sqrt{\sqrt{16}} = 4$

4) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = \sqrt[6]{27}$

5) $\sqrt{x^2} = x$ (для любого $x$)

6) $(\sqrt{x})^2 = x$ (для любого $x$)

# Вынесение множителя из-под знака корня

## Теория

В этой главе мы научимся выносить множитель из-под знака корня. Это очень важный навык, который позволяет упрощать выражения с корнями.

**Основная идея:** Если подкоренное выражение содержит множитель, который можно представить в виде степени с показателем, кратным показателю корня, то этот множитель можно вынести из-под корня.

**Правило:**

$$\sqrt[n]{a^k b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$$

при условии, что $k$ кратно $n$ (или мы выносим максимально возможную степень).

**Алгоритм:**

1. Разложить подкоренное выражение на множители
2. Выделить множители, которые являются полными $n$-ми степенями
3. Вынести эти множители из-под корня (извлекая из них корень)
4. Оставшиеся множители оставить под корнем

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Вынесение из квадратного корня*

Упростите выражение:

$$\sqrt{18}$$

Разложим 18 на множители: $18 = 9 \cdot 2 = 3^2 \cdot 2$
$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

## Пример 2

*Вынесение из квадратного корня*

Упростите выражение:

$$\sqrt{50}$$

$50 = 25 \cdot 2 = 5^2 \cdot 2$
$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

## Пример 3

*Вынесение из квадратного корня*

Упростите выражение:

$$\sqrt{72}$$

$72 = 36 \cdot 2 = 6^2 \cdot 2$
$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$

## Пример 4

*Вынесение из кубического корня*

Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{16}$$

$16 = 8 \cdot 2 = 2^3 \cdot 2$
$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

## Пример 5

*Вынесение из кубического корня*

Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{54}$$

$54 = 27 \cdot 2 = 3^3 \cdot 2$
$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = 3\sqrt[3]{2}$

## Пример 6

*Вынесение из корня четвёртой степени*

Упростите выражение:

$$\sqrt[4]{32}$$

$32 = 16 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2$
$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$

## Пример 7

*Вынесение с буквами*

Упростите выражение:

$$\sqrt{8x^3}$$

$8x^3 = 4 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x = 2^2 \cdot x^2 \cdot 2x$
$\sqrt{8x^3} = \sqrt{(2x)^2 \cdot 2x} = 2x\sqrt{2x}$ (при $x \geq 0$)

## Пример 8

*Вынесение с буквами (кубический корень)*

Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{27x^5y^4}$$

$27x^5y^4 = 27 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot y^3 \cdot y = 3^3 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot x^2y$
$\sqrt[3]{27x^5y^4} = \sqrt[3]{(3xy)^3 \cdot x^2y} = 3xy\sqrt[3]{x^2y}$

## Пример 9

*Несколько множителей*

Упростите выражение:

$$\sqrt{200}$$

$200 = 100 \cdot 2 = 10^2 \cdot 2$
$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

При вынесении множителя из-под корня чётной степени нужно следить за знаком. Обычно мы считаем, что переменные неотрицательны, чтобы избежать проблем с модулем.

Например, $\sqrt{x^2} = |x|$, а не просто $x$. Но в школьных задачах часто подразумевают $x \geq 0$, тогда $\sqrt{x^2} = x$.

# Задачи

**1.** Вынесите множитель из-под знака квадратного корня:

1) $\sqrt{8}$
4) $\sqrt{20}$
7) $\sqrt{32}$
10) $\sqrt{48}$
2) $\sqrt{12}$
5) $\sqrt{27}$
8) $\sqrt{44}$
11) $\sqrt{50}$
3) $\sqrt{18}$
6) $\sqrt{28}$
9) $\sqrt{45}$
12) $\sqrt{52}$

**2.** Вынесите множитель из-под знака квадратного корня:

1) $\sqrt{60}$
4) $\sqrt{72}$
7) $\sqrt{84}$
10) $\sqrt{92}$
2) $\sqrt{63}$
5) $\sqrt{75}$
8) $\sqrt{88}$
11) $\sqrt{96}$
3) $\sqrt{68}$
6) $\sqrt{80}$
9) $\sqrt{90}$
12) $\sqrt{98}$

**3.** Вынесите множитель из-под знака кубического корня:

1) $\sqrt[3]{16}$
4) $\sqrt[3]{54}$
7) $\sqrt[3]{80}$
10) $\sqrt[3]{112}$
2) $\sqrt[3]{24}$
5) $\sqrt[3]{56}$
8) $\sqrt[3]{81}$
11) $\sqrt[3]{128}$
3) $\sqrt[3]{40}$
6) $\sqrt[3]{72}$
9) $\sqrt[3]{108}$
12) $\sqrt[3]{135}$

**4.** Вынесите множитель из-под знака корня четвёртой степени:

1) $\sqrt[4]{16}$
4) $\sqrt[4]{80}$
7) $\sqrt[4]{112}$
10) $\sqrt[4]{256}$
2) $\sqrt[4]{32}$
5) $\sqrt[4]{81}$
8) $\sqrt[4]{162}$
11) $\sqrt[4]{272}$
3) $\sqrt[4]{48}$
6) $\sqrt[4]{96}$
9) $\sqrt[4]{243}$
12) $\sqrt[4]{288}$

**5.** Вынесите множитель из-под знака корня (с буквами, считаем переменные неотрицательными):

1) $\sqrt{4x^2}$
5) $\sqrt{8a^3}$
9) $\sqrt[3]{8x^4}$
2) $\sqrt{9x^3}$
6) $\sqrt{12a^5}$
10) $\sqrt[3]{27x^5}$
3) $\sqrt{16x^5}$
7) $\sqrt{18a^7}$
11) $\sqrt[3]{64x^7}$
4) $\sqrt{25x^7}$
8) $\sqrt{20a^9}$
12) $\sqrt[3]{125x^8}$

**6.** Вынесите множитель из-под знака корня (с несколькими переменными):

1) $\sqrt{4x^2y^2}$
5) $\sqrt{12x^6y^5}$
9) $\sqrt[3]{64x^7y^8}$
2) $\sqrt{9x^3y^4}$
6) $\sqrt{18x^8y^7}$
10) $\sqrt[4]{16x^5y^6}$
3) $\sqrt{16x^5y^6}$
7) $\sqrt[3]{8x^4y^5}$
11) $\sqrt[4]{81x^7y^9}$
4) $\sqrt{8x^4y^3}$
8) $\sqrt[3]{27x^5y^7}$
12) $\sqrt[4]{256x^9y^{10}}$

**7.** Упростите выражение и вычислите (если возможно):

1) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$
6) $\sqrt{72}+\sqrt{98}$
2) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$
7) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$
3) $\sqrt{20}-\sqrt{45}$
8) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$
4) $\sqrt{32}-\sqrt{50}$
9) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}$
5) $\sqrt{48}+\sqrt{75}$
10) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

**2)** $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

**3)** $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

**4)** $\sqrt{50} = 5\sqrt{10}$

**5)** $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$

**6)** $\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$ (при $x \geq 0$)

# Внесение множителя под знак корня

## Теория

В этой главе мы научимся выполнять обратную операцию — вносить множитель под знак корня. Это тоже часто используется при упрощении выражений и сравнении чисел.

**Правило:**

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

при условии, что $a \geq 0$ (для корней чётной степени).

Что означают эти буквы?

- $a$ — множитель перед корнем
- $b$ — подкоренное выражение
- $n$ — показатель корня
- Чтобы внести множитель под корень, нужно возвести его в степень, равную показателю корня, и умножить на подкоренное выражение

**Почему это так?** Рассмотрим на примере: $3\sqrt{2}$. По определению, $3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$.

**Важно!** Для корней чётной степени множитель должен быть неотрицательным. Если множитель отрицательный, то знак минус остаётся перед корнем, а под корень вносится положительное число.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Внесение под квадратный корень*

Внесите множитель под знак корня:

$$2\sqrt{3}$$

Возводим 2 в квадрат: $2^2 = 4$
$2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$

## Пример 2

*Внесение под квадратный корень*

Внесите множитель под знак корня:

$$5\sqrt{2}$$

$5^2 = 25$, поэтому $5\sqrt{2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$

## Пример 3

*Внесение под кубический корень*

Внесите множитель под знак корня:

$$2\sqrt[3]{4}$$

Возводим 2 в куб: $2^3 = 8$
$2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32}$

## Пример 4

*Внесение под корень четвёртой степени*

Внесите множитель под знак корня:

$$3\sqrt[4]{2}$$

$3^4 = 81$, поэтому $3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$

## Пример 5

*Внесение отрицательного множителя*

Внесите множитель под знак корня:

$$-2\sqrt{3}$$

Отрицательный множитель оставляем перед корнем, а под корень вносим положительное число:

$$-2\sqrt{3} = -\sqrt{4 \cdot 3} = -\sqrt{12}$$

## Пример 6

*Внесение с буквами*

Внесите множитель под знак корня (считаем $x \geq 0$):

$$x\sqrt{x}$$

$x\sqrt{x} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^3}$

## Пример 7

*Внесение с буквами (кубический корень)*

Внесите множитель под знак корня:

$$2x\sqrt[3]{x}$$

$2x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot x} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{8x^4}$

## Пример 8

*Сравнение чисел с помощью внесения под корень*

Что больше: $3\sqrt{2}$ или $2\sqrt{3}$?
Внесём множители под корень:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$
$$2\sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

Так как $\sqrt{18} > \sqrt{12}$, то $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

## Пример 9

*Обратная операция к вынесению*

Иногда удобно сначала внести множитель под корень, а потом вынести что-то другое. Например:
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ — это вынесение.
$2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ — это внесение.

## Пример 10

*Важное предупреждение*

При внесении множителя под корень чётной степени нужно следить за знаком. Например:
$-3\sqrt{2} = -\sqrt{18}$, а не $\sqrt{-18}$ (под корнем не может быть отрицательного числа).

Если под корнем чётной степени может оказаться отрицательное выражение, то такое преобразование недопустимо.

# Задачи

**1.** Внесите множитель под знак квадратного корня:

1) $2\sqrt{2}$
2) $3\sqrt{3}$
3) $4\sqrt{5}$
4) $5\sqrt{6}$
5) $2\sqrt{7}$
6) $3\sqrt{10}$
7) $4\sqrt{3}$
8) $5\sqrt{2}$
9) $6\sqrt{2}$
10) $7\sqrt{3}$
11) $8\sqrt{5}$
12) $9\sqrt{7}$

**2.** Внесите множитель под знак кубического корня:

1) $2\sqrt[3]{2}$
2) $2\sqrt[3]{3}$
3) $3\sqrt[3]{2}$
4) $3\sqrt[3]{4}$
5) $4\sqrt[3]{2}$
6) $4\sqrt[3]{3}$
7) $5\sqrt[3]{2}$
8) $5\sqrt[3]{4}$
9) $2\sqrt[3]{5}$
10) $3\sqrt[3]{6}$
11) $4\sqrt[3]{7}$
12) $5\sqrt[3]{8}$

**3.** Внесите множитель под знак корня четвёртой степени:

1) $2\sqrt[4]{2}$
2) $2\sqrt[4]{3}$
3) $3\sqrt[4]{2}$
4) $3\sqrt[4]{4}$
5) $4\sqrt[4]{2}$
6) $4\sqrt[4]{3}$
7) $5\sqrt[4]{2}$
8) $5\sqrt[4]{4}$
9) $2\sqrt[4]{5}$
10) $3\sqrt[4]{6}$
11) $4\sqrt[4]{7}$
12) $5\sqrt[4]{8}$

**4.** Внесите множитель под знак корня (с отрицательным знаком):

1) $-2\sqrt{3}$
2) $-3\sqrt{5}$
3) $-4\sqrt{2}$
4) $-5\sqrt{7}$
5) $-2\sqrt[3]{2}$
6) $-3\sqrt[3]{4}$
7) $-4\sqrt[3]{3}$
8) $-5\sqrt[3]{5}$
9) $-2\sqrt[4]{3}$
10) $-3\sqrt[4]{2}$
11) $-4\sqrt[4]{5}$
12) $-5\sqrt[4]{6}$

**5.** Внесите множитель под знак корня (с буквами, считаем переменные неотрицательными):

1) $x\sqrt{x}$
2) $x\sqrt{x^2}$
3) $x^2\sqrt{x}$
4) $2x\sqrt{x}$
5) $3x\sqrt{2x}$
6) $4x^2\sqrt{3x}$
7) $x\sqrt[3]{x}$
8) $x^2\sqrt[3]{x}$
9) $2x\sqrt[3]{x^2}$
10) $3x^2\sqrt[3]{2x}$
11) $x\sqrt[4]{x}$
12) $x^3\sqrt[4]{x^2}$

**6.** Сравните числа, внося множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$
2) $4\sqrt{2}$ и $2\sqrt{5}$
3) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$
4) $2\sqrt{6}$ и $3\sqrt{3}$
5) $2\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{9}$
6) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$
7) $2\sqrt[4]{4}$ и $3\sqrt[4]{2}$
8) $4\sqrt[4]{2}$ и $2\sqrt[4]{8}$

**7.** Упростите выражение (сначала внесите, потом вынесите, если нужно):

1) $\sqrt{8}+2\sqrt{2}$
2) $\sqrt{12}+3\sqrt{3}$
3) $\sqrt{18}-2\sqrt{2}$
4) $\sqrt{20}-2\sqrt{5}$
5) $\sqrt{32}+4\sqrt{2}$
6) $\sqrt{45}-3\sqrt{5}$
7) $\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{2}$
8) $\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{2}$
9) $\sqrt[4]{32}+2\sqrt[4]{2}$
10) $\sqrt[4]{162}-3\sqrt[4]{2}$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $2\sqrt{3} = \sqrt{6}$

**2)** $3\sqrt{2} = \sqrt{18}$

**3)** $4\sqrt{2} = \sqrt{32}$

**4)** $-2\sqrt{3} = \sqrt{-12}$

**5)** $x\sqrt{x} = \sqrt{x^3}$ (при $x \geq 0$)

**6)** $2\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$

# Практика по блоку 3

## Теория

В этом блоке мы изучили основные действия с корнями:

- **Определение корня:** $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, b \geq 0, a \geq 0$
- **Корень из произведения:** $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- **Корень из частного:** $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- **Возведение корня в степень:** $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
- **Корень из корня:** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- **Вынесение множителя:** $\sqrt[n]{a^k b} = a\sqrt[n]{b}$ (если $k$ кратно $n$)
- **Внесение множителя:** $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ (при $a \geq 0$)

В этой главе собраны задачи на все эти правила вперемешку. Ваша задача — вспомнить нужное свойство и правильно его применить.

## Задачи

**1.** Вычислите значение корня:

1) $\sqrt{25}$
2) $\sqrt{36}$
3) $\sqrt{49}$
4) $\sqrt{64}$
5) $\sqrt[3]{27}$
6) $\sqrt[3]{64}$
7) $\sqrt[3]{125}$
8) $\sqrt[3]{216}$
9) $\sqrt[4]{16}$
10) $\sqrt[4]{81}$
11) $\sqrt[4]{256}$
12) $\sqrt[4]{625}$

**2.** Вычислите, используя свойства корней:

1) $\sqrt{4 \cdot 9}$
2) $\sqrt{16 \cdot 25}$
3) $\sqrt{36 \cdot 49}$
4) $\sqrt{64 \cdot 81}$
5) $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$
6) $\sqrt[3]{27 \cdot 64}$
7) $\sqrt[3]{125 \cdot 216}$
8) $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$
9) $\sqrt{\frac{36}{9}}$
10) $\sqrt{\frac{64}{16}}$
11) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$
12) $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$

**3.** Вычислите:

1) $(\sqrt{2})^2$
2) $(\sqrt{3})^2$
3) $(\sqrt{5})^2$
4) $(\sqrt{7})^2$
5) $(\sqrt[3]{2})^3$
6) $(\sqrt[3]{3})^3$
7) $(\sqrt[3]{4})^3$
8) $(\sqrt[3]{5})^3$
9) $\sqrt{\sqrt{16}}$
10) $\sqrt{\sqrt{81}}$
11) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$
12) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

**4.** Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8}$
2) $\sqrt{12}$
3) $\sqrt{18}$
4) $\sqrt{20}$
5) $\sqrt{27}$
6) $\sqrt{32}$
7) $\sqrt{45}$
8) $\sqrt{50}$
9) $\sqrt[3]{16}$
10) $\sqrt[3]{24}$
11) $\sqrt[3]{54}$
12) $\sqrt[3]{81}$

**5.** Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{2}$

2) $3\sqrt{3}$

3) $4\sqrt{5}$

4) $5\sqrt{6}$

5) $2\sqrt[3]{2}$

6) $3\sqrt[3]{4}$

7) $4\sqrt[3]{2}$

8) $5\sqrt[3]{3}$

9) $-2\sqrt{3}$

10) $-3\sqrt{5}$

11) $-4\sqrt{2}$

12) $-5\sqrt{7}$

**6.** Упростите выражение (считаем переменные неотрицательными):

1) $\sqrt{4x^2}$

2) $\sqrt{9x^4}$

3) $\sqrt{16x^6}$

4) $\sqrt[3]{8x^3}$

5) $\sqrt[3]{27x^6}$

6) $\sqrt[3]{64x^9}$

7) $\sqrt{x^2y^2}$

8) $\sqrt{x^4y^6}$

9) $\sqrt[3]{x^3y^6}$

10) $\sqrt[4]{x^4y^8}$

11) $\sqrt{4x^2y^4}$

12) $\sqrt[3]{8x^6y^9}$

**7.** Упростите выражение и вычислите (если возможно):

1) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

2) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$

3) $\sqrt{20}-\sqrt{45}$

4) $\sqrt{32}-\sqrt{50}$

5) $\sqrt{48}+\sqrt{75}$

6) $\sqrt{72}-\sqrt{98}$

7) $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}$

8) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}$

9) $\sqrt[4]{32}+\sqrt[4]{162}$

10) $\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{243}$

11) $2\sqrt{2}+\sqrt{8}$

12) $3\sqrt{3}-\sqrt{12}$

**8.** Сравните числа:

1) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$

2) $4\sqrt{2}$ и $2\sqrt{5}$

3) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$

4) $2\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{9}$

5) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$

6) $\sqrt{8}$ и $2\sqrt{2}$

7) $\sqrt{12}$ и $2\sqrt{3}$

8) $\sqrt{18}$ и $3\sqrt{2}$

**9.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $\sqrt{4x}$ при $x=2$

2) $\sqrt{9x}$ при $x=3$

3) $\sqrt{x^2}$ при $x=5$

4) $\sqrt{x^2}$ при $x=-5$

5) $\sqrt{x^3}$ при $x=4$

6) $\sqrt[3]{x^3}$ при $x=2$

7) $\sqrt[3]{x^3}$ при $x=-2$

8) $\sqrt{x^2y}$ при $x=2, y=3$

9) $\sqrt{4x^2y}$ при $x=3, y=2$

10) $\sqrt[3]{8x^3y^2}$ при $x=2, y=3$

**10.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $\sqrt{16+9}=\sqrt{16}+\sqrt{9}$

2) $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$

3) $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

4) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

5) $2\sqrt{3}=\sqrt{6}$

6) $\sqrt{x^2}=x$ (для любого $x$)

7) $(\sqrt{x})^2=x$ (для любого $x$)

8) $\sqrt[3]{-8}=-2$

# Степень с дробным показателем. Определение

## Теория

В этой главе мы познакомимся со степенью с дробным показателем. Это обобщение понятия степени, которое связывает степени и корни.

**Определение:** Степенью числа $a$ с дробным показателем $\dfrac{m}{n}$ называется:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

где $a \geq 0$ (для корней чётной степени), $n$ — натуральное число ($n \geq 2$), $m$ — целое число.

**Частные случаи:**

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ — корень $n$-й степени
- $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$ — можно сначала извлечь корень, потом возвести в степень
- $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ — можно сначала возвести в степень, потом извлечь корень

**Свойства:** Для дробных показателей выполняются все те же свойства, что и для целых показателей:

- $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$
- $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$
- $(a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$
- $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

**Важно!** Для отрицательных чисел дробные показатели определяются не всегда (особенно если корень чётной степени). Поэтому обычно считаем $a > 0$.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Степень с дробным показателем*

Вычислите:

$$4^{\frac{1}{2}}$$

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

## Пример 2

*Степень с дробным показателем*

Вычислите:

$$8^{\frac{1}{3}}$$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

## Пример 3

*Степень с дробным показателем*

Вычислите:

$$16^{\frac{1}{4}}$$

$16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

## Пример 4

*Степень с числителем не 1*

Вычислите:

$$8^{\frac{2}{3}}$$

Можно двумя способами:
1) $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^2 = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
2) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

## Пример 5

*Степень с числителем не 1*

Вычислите:

$$27^{\frac{2}{3}}$$

$27^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$ или $\sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{729} = 9$

## Пример 6

*Степень с числителем не 1*

Вычислите:

$$32^{\frac{3}{5}}$$

$32^{\frac{3}{5}} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$ или $\sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{32768} = 8$

## Пример 7

*Степень с дробным показателем от дроби*

Вычислите:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

## Пример 8

*Степень с отрицательным дробным показателем*

Вычислите:

$$9^{-\frac{1}{2}}$$

$$9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

## Пример 9

*Степень с отрицательным дробным показателем*

Вычислите:

$$8^{-\frac{2}{3}}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{4}$$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Не путайте: $a^{\frac{m}{n}}$ и $(a^{\frac{1}{n}})^m$ — это одно и то же. Но $a^{\frac{m}{n}}$ — это единый символ, а не деление.

Также помните, что для отрицательных чисел дробные показатели могут быть не определены. Например, $(-4)^{\frac{1}{2}}$ не существует в действительных числах.

# Задачи

**1.** Представьте в виде корня:

1) $2^{\frac{1}{2}}$ 4) $7^{\frac{1}{5}}$ 7) $y^{\frac{1}{4}}$ 10) $8^{\frac{3}{4}}$

2) $3^{\frac{1}{3}}$ 5) $x^{\frac{1}{2}}$ 8) $b^{\frac{1}{5}}$ 11) $16^{\frac{5}{2}}$

3) $5^{\frac{1}{4}}$ 6) $a^{\frac{1}{3}}$ 9) $4^{\frac{2}{3}}$ 12) $27^{\frac{2}{3}}$

**2.** Представьте в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{7}$ 7) $\sqrt[4]{3}$ 10) $\sqrt[3]{x}$

2) $\sqrt{3}$ 5) $\sqrt[3]{2}$ 8) $\sqrt[4]{5}$ 11) $\sqrt[4]{x^2}$

3) $\sqrt{5}$ 6) $\sqrt[3]{4}$ 9) $\sqrt{x}$ 12) $\sqrt[5]{x^3}$

**3.** Вычислите:

1) $4^{\frac{1}{2}}$ 4) $25^{\frac{1}{2}}$ 7) $64^{\frac{1}{3}}$ 10) $81^{\frac{1}{4}}$

2) $9^{\frac{1}{2}}$ 5) $8^{\frac{1}{3}}$ 8) $125^{\frac{1}{3}}$ 11) $256^{\frac{1}{4}}$

3) $16^{\frac{1}{2}}$ 6) $27^{\frac{1}{3}}$ 9) $16^{\frac{1}{4}}$ 12) $625^{\frac{1}{4}}$

**4.** Вычислите:

1) $4^{\frac{3}{2}}$ 4) $25^{\frac{3}{2}}$ 7) $64^{\frac{2}{3}}$ 10) $81^{\frac{3}{4}}$

2) $9^{\frac{3}{2}}$ 5) $8^{\frac{2}{3}}$ 8) $125^{\frac{2}{3}}$ 11) $32^{\frac{2}{5}}$

3) $16^{\frac{3}{2}}$ 6) $27^{\frac{2}{3}}$ 9) $16^{\frac{3}{4}}$ 12) $32^{\frac{3}{5}}$

**5.** Вычислите (отрицательный показатель):

1) $4^{-\frac{1}{2}}$ 4) $25^{-\frac{1}{2}}$ 7) $64^{-\frac{1}{3}}$ 10) $8^{-\frac{2}{3}}$

2) $9^{-\frac{1}{2}}$ 5) $8^{-\frac{1}{3}}$ 8) $125^{-\frac{1}{3}}$ 11) $16^{-\frac{3}{4}}$

3) $16^{-\frac{1}{2}}$ 6) $27^{-\frac{1}{3}}$ 9) $4^{-\frac{3}{2}}$ 12) $32^{-\frac{2}{5}}$

**6.** Вычислите:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 7) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$

2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ 8) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$

3) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ 9) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

4) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ 10) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

5) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ 11) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

6) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$ 12) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

**7.** Найдите значение выражения:

**1)** $4^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{2}}$

**2)** $16^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{2}}$

**3)** $8^{\frac{2}{3}}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$

**4)** $64^{\frac{1}{3}}:8^{\frac{1}{3}}$

**5)** $4^{\frac{3}{2}}\cdot 4^{-\frac{1}{2}}$

**6)** $9^{\frac{5}{2}}:9^{\frac{3}{2}}$

**7)** $(8^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

**8)** $(27^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{4}}$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $4^{\frac{1}{2}}=2$

**2)** $8^{\frac{1}{3}}=2$

**3)** $9^{\frac{3}{2}}=27$

**4)** $16^{\frac{3}{4}}=8$

**5)** $(-4)^{\frac{1}{2}}=-2$

**6)** $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$

# Действия со степенями с рациональным показателем

## Теория

В этой главе мы научимся выполнять действия со степенями, имеющими рациональные показатели. Все свойства степеней, которые мы изучали для целых показателей, работают и для рациональных.

**Напомним основные свойства:**

Для любых рациональных показателей $p$ и $q$ (при условии, что все выражения имеют смысл) выполняются:

1. **Умножение:** $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$
2. **Деление:** $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. **Возведение в степень:** $(a^p)^q = a^{p\cdot q}$
4. **Степень произведения:** $(ab)^p = a^p b^p$
5. **Степень частного:** $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

**Важно!** Все эти свойства верны при $a > 0$ (чтобы избежать проблем с отрицательными числами и корнями чётной степени).

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Умножение степеней*

Упростите выражение:

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$$

Применяем правило умножения: $2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = 2^{\frac{5}{6}}$

## Пример 2

*Умножение степеней*

Упростите выражение:

$$3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$$

$3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}} = 3^{\frac{8}{12}+\frac{3}{12}} = 3^{\frac{11}{12}}$

## Пример 3

*Деление степеней*

Упростите выражение:

$$5^{\frac{3}{4}} : 5^{\frac{1}{2}}$$

$5^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}} = 5^{\frac{1}{4}}$

## Пример 4

*Деление степеней*

Упростите выражение:

$$7^{\frac{5}{6}} : 7^{\frac{1}{3}}$$

$7^{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}} = 7^{\frac{5}{6}-\frac{2}{6}} = 7^{\frac{3}{6}} = 7^{\frac{1}{2}}$

## Пример 5

*Возведение степени в степень*

Упростите выражение:

$$(2^{\frac{1}{3}})^6$$

$(2^{\frac{1}{3}})^6 = 2^{\frac{1}{3}\cdot 6} = 2^2 = 4$

## Пример 6

*Возведение степени в степень*

Упростите выражение:

$$(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$$

$(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

## Пример 7

*Степень произведения*

Упростите выражение:

$$(4x)^{\frac{1}{2}}$$

$(4x)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

## Пример 8

*Степень частного*

Упростите выражение:

$$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{8^{\frac{2}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}} = \frac{(\sqrt[3]{8})^2}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

## Пример 9

*Смешанный пример*

Упростите выражение:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}}$$

$x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{3}{12}} = x^{\frac{7}{12}}$

## Пример 10

*Смешанный пример с числами*

Вычислите:

$$\frac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$

$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$
$4^{\frac{1}{2}} = 2$
В числителе: $4 \cdot 2 = 8 = 2^3$
$2^3 : 2^{\frac{1}{2}} = 2^{3-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$

# Задачи

**1.** Упростите, применяя правило умножения:

1) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$
2) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$
3) $5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$
4) $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$
5) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$
6) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$
7) $y^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$
8) $b^{\frac{4}{5}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$
9) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{1}{8}}$
10) $3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{9}}$
11) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{8}}$
12) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{12}}$

**2.** Упростите, применяя правило деления:

1) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{2}}$
2) $3^{\frac{5}{6}} : 3^{\frac{1}{3}}$
3) $5^{\frac{7}{8}} : 5^{\frac{1}{4}}$
4) $7^{\frac{4}{5}} : 7^{\frac{2}{5}}$
5) $x^{\frac{5}{6}} : x^{\frac{1}{2}}$
6) $a^{\frac{7}{8}} : a^{\frac{1}{4}}$
7) $y^{\frac{4}{5}} : y^{\frac{2}{3}}$
8) $b^{\frac{9}{10}} : b^{\frac{1}{5}}$
9) $2^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{3}}$
10) $3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}}$
11) $x^{\frac{3}{4}} : x^{\frac{1}{2}}$
12) $a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{1}{3}}$

**3.** Упростите, применяя правило возведения в степень:

1) $(2^{\frac{1}{2}})^4$
2) $(3^{\frac{1}{3}})^6$
3) $(5^{\frac{2}{3}})^3$
4) $(7^{\frac{3}{4}})^8$
5) $(x^{\frac{1}{2}})^4$
6) $(a^{\frac{2}{3}})^6$
7) $(y^{\frac{3}{4}})^8$
8) $(b^{\frac{4}{5}})^{10}$
9) $(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$
10) $(3^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{9}}$
11) $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$
12) $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{5}}$

**4.** Упростите, применяя свойства степени произведения и частного:

1) $(4x)^{\frac{1}{2}}$
2) $(9a)^{\frac{1}{2}}$
3) $(16y)^{\frac{1}{2}}$
4) $(8x)^{\frac{1}{3}}$
5) $(27a)^{\frac{1}{3}}$
6) $(64b)^{\frac{1}{3}}$
7) $\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$
8) $\left(\frac{a}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$
9) $\left(\frac{y}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$
10) $\left(\frac{x}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$
11) $\left(\frac{a}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$
12) $\left(\frac{b}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

**5.** Упростите выражение:

1) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}$
2) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$
3) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$
4) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}$
5) $(x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}}$
6) $(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$
7) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^6$
8) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^{12}$
9) $(16x^4)^{\frac{1}{2}}$
10) $(27a^6)^{\frac{1}{3}}$
11) $(81x^8)^{\frac{1}{4}}$
12) $\left(\dfrac{8x^3}{27y^6}\right)^{\frac{2}{3}}$

**6.** Вычислите значение выражения:

1) $4^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}$
2) $8^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$
3) $9^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{1}{2}}$
4) $16^{\frac{5}{4}} : 16^{\frac{1}{2}}$
5) $(27^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$
6) $(32^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{3}}$
7) $\dfrac{8^{\frac{2}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$
8) $\dfrac{9^{\frac{3}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

9) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

10) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

**7.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ при $x = 64$

2) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$ при $a = 16$

3) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ при $x = 81$

4) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ при $a = 64$

5) $(x^{\frac{1}{2}})^6$ при $x = 4$

6) $(a^{\frac{1}{3}})^9$ при $a = 8$

7) $(16x)^{\frac{1}{2}}$ при $x = 4$

8) $(27a)^{\frac{1}{3}}$ при $a = 8$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$

2) $3^{\frac{3}{4}} : 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{4}}$

3) $(2^{\frac{1}{3}})^6 = 2^2$

4) $(4x)^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$

5) $8^{\frac{2}{3}} = 4$

6) $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$

# Переход от корней к степеням и обратно

## Теория

В этой главе мы научимся свободно переходить от записи с корнями к записи со степенями и обратно. Это очень важный навык, который позволяет выбирать более удобную форму записи в зависимости от задачи.

**Основные формулы перехода:**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Частные случаи:**

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$
- $\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$
- $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

**Почему это удобно?**

- Со степенями часто проще выполнять действия (умножение, деление, возведение в степень)
- Корни нагляднее для понимания (особенно при сравнении чисел)
- В разных задачах удобнее разные формы записи

**Важно!** При переходе к степеням нужно помнить об области определения. Для корней чётной степени подкоренное выражение должно быть неотрицательным, и при переходе к степени это условие сохраняется.

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Корень в степень*

Представьте в виде степени:

$$\sqrt[3]{5}$$

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

## Пример 2

*Корень в степень*

Представьте в виде степени:

$$\sqrt[4]{2^3}$$

$\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

## Пример 3

*Корень в степень с буквами*

Представьте в виде степени:

$$\sqrt{x^3}$$

$\sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ (при $x \geq 0$)

## Пример 4

*Степень в корень*

Представьте в виде корня:

$$7^{\frac{1}{2}}$$

$7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

## Пример 5

*Степень в корень*

Представьте в виде корня:

$$5^{\frac{2}{3}}$$

$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

## Пример 6

*Степень в корень с буквами*

Представьте в виде корня:

$$x^{\frac{3}{4}}$$

$x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ (при $x \geq 0$)

## Пример 7

*Упрощение выражения с помощью перехода к степеням*

Упростите:

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x}$$

Перейдём к степеням: $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}} = x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$

## Пример 8

*Упрощение выражения с помощью перехода к степеням*

Упростите:

$$\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}$$

$\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
$\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{4}-\frac{2}{4}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

## Пример 9

*Сравнение чисел с помощью перехода к степеням*

Что больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?
Перейдём к степеням: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$
Приведём к общему показателю: $2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, $3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$
Так как $\sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$, то $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

## Пример 10

*Обратный переход*

Иногда полезно сделать обратный переход — от степени к корню, чтобы лучше понять величину числа. Например, $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

# Задачи

**1.** Представьте в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{3}$

2) $\sqrt{5}$

3) $\sqrt{7}$

4) $\sqrt{11}$

5) $\sqrt[3]{2}$

6) $\sqrt[3]{4}$

7) $\sqrt[3]{6}$

8) $\sqrt[3]{9}$

9) $\sqrt[4]{2}$

10) $\sqrt[4]{3}$

11) $\sqrt[4]{5}$

12) $\sqrt[4]{7}$

**2.** Представьте в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{2^3}$

2) $\sqrt{3^5}$

3) $\sqrt{5^7}$

4) $\sqrt{7^9}$

5) $\sqrt[3]{2^2}$

6) $\sqrt[3]{3^4}$

7) $\sqrt[3]{5^5}$

8) $\sqrt[3]{7^8}$

9) $\sqrt[4]{2^3}$

10) $\sqrt[4]{3^5}$

11) $\sqrt[4]{5^7}$

12) $\sqrt[4]{7^9}$

**3.** Представьте в виде степени с дробным показателем:

1) $\sqrt{x}$

2) $\sqrt{a}$

3) $\sqrt{y}$

4) $\sqrt{b}$

5) $\sqrt[3]{x}$

6) $\sqrt[3]{a}$

7) $\sqrt[3]{y}$

8) $\sqrt[3]{b}$

9) $\sqrt{x^3}$

10) $\sqrt{a^5}$

11) $\sqrt[3]{x^2}$

12) $\sqrt[4]{a^3}$

**4.** Представьте в виде корня:

1) $2^{\frac{1}{2}}$

2) $3^{\frac{1}{2}}$

3) $5^{\frac{1}{3}}$

4) $7^{\frac{1}{4}}$

5) $4^{\frac{2}{3}}$

6) $8^{\frac{3}{4}}$

7) $9^{\frac{5}{2}}$

8) $16^{\frac{3}{4}}$

9) $x^{\frac{1}{2}}$

10) $a^{\frac{1}{3}}$

11) $y^{\frac{2}{3}}$

12) $b^{\frac{3}{4}}$

**5.** Представьте в виде корня и упростите, если возможно:

1) $4^{\frac{1}{2}}$

2) $9^{\frac{1}{2}}$

3) $8^{\frac{1}{3}}$

4) $27^{\frac{1}{3}}$

5) $16^{\frac{1}{4}}$

6) $81^{\frac{1}{4}}$

7) $4^{\frac{3}{2}}$

8) $8^{\frac{2}{3}}$

9) $16^{\frac{3}{4}}$

10) $32^{\frac{2}{5}}$

11) $27^{\frac{2}{3}}$

12) $125^{\frac{2}{3}}$

**6.** Упростите выражение, переходя к степеням:

1) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}$

2) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}$

3) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}$

4) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

5) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

6) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$

7) $(\sqrt{x})^3\cdot\sqrt{x}$

8) $(\sqrt[3]{x})^2\cdot\sqrt[3]{x}$

9) $(\sqrt[4]{x})^3\cdot\sqrt[4]{x}$

10) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}$

11) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x}$

12) $\sqrt[4]{x^3}\cdot\sqrt[4]{x}$

**7.** Упростите выражение и представьте результат в виде корня:

1) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$

2) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$

3) $\dfrac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$

5) $\sqrt{x\sqrt{x}}$

6) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

7) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

8) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$

9) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

10) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$

**8.** Сравните числа, переходя к степеням с общим показателем:

**1)** $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

**2)** $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{4}$

**3)** $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{3}$

**4)** $\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

**5)** $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$

**6)** $4^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$

**7)** $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{10}$

**8)** $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt[4]{15}$

**9.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

**2)** $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

**3)** $x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$

**4)** $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

**5)** $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}}$

**6)** $\sqrt{x^2} = x$ (для любого $x$)

# Практика по блоку 4

## Теория

В этом блоке мы изучили степени с рациональным показателем:

- **Определение:** $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (при $a \geq 0$ для корней чётной степени)
- **Свойства:** все свойства степеней (умножение, деление, возведение в степень, степень произведения и частного) работают для любых рациональных показателей
- **Переход:** $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ и обратно

В этой главе собраны задачи на все эти темы вперемешку. Ваша задача — вспомнить нужное свойство и правильно его применить.

## Задачи

**1.** Представьте в виде степени с рациональным показателем:

**1)** $\sqrt{7}$ **4)** $\sqrt[4]{3}$ **7)** $\sqrt[3]{3^2}$ **10)** $\sqrt[3]{a}$

**2)** $\sqrt{11}$ **5)** $\sqrt{2^3}$ **8)** $\sqrt[4]{2^3}$ **11)** $\sqrt[4]{x^3}$

**3)** $\sqrt[3]{5}$ **6)** $\sqrt{5^4}$ **9)** $\sqrt{x}$ **12)** $\sqrt[5]{a^4}$

**2.** Представьте в виде корня:

**1)** $2^{\frac{1}{2}}$ **4)** $7^{\frac{1}{5}}$ **7)** $9^{\frac{5}{2}}$ **10)** $a^{\frac{1}{3}}$

**2)** $3^{\frac{1}{3}}$ **5)** $4^{\frac{2}{3}}$ **8)** $16^{\frac{3}{4}}$ **11)** $y^{\frac{2}{3}}$

**3)** $5^{\frac{1}{4}}$ **6)** $8^{\frac{3}{4}}$ **9)** $x^{\frac{1}{2}}$ **12)** $b^{\frac{3}{4}}$

**3.** Вычислите:

**1)** $4^{\frac{1}{2}}$ **4)** $25^{\frac{1}{2}}$ **7)** $64^{\frac{1}{3}}$ **10)** $81^{\frac{3}{4}}$

**2)** $9^{\frac{1}{2}}$ **5)** $8^{\frac{1}{3}}$ **8)** $125^{\frac{1}{3}}$ **11)** $32^{\frac{2}{5}}$

**3)** $16^{\frac{1}{2}}$ **6)** $27^{\frac{1}{3}}$ **9)** $16^{\frac{3}{4}}$ **12)** $32^{\frac{3}{5}}$

**4.** Вычислите (отрицательный показатель):

**1)** $4^{-\frac{1}{2}}$ **4)** $25^{-\frac{1}{2}}$ **7)** $64^{-\frac{1}{3}}$ **10)** $8^{-\frac{2}{3}}$

**2)** $9^{-\frac{1}{2}}$ **5)** $8^{-\frac{1}{3}}$ **8)** $125^{-\frac{1}{3}}$ **11)** $16^{-\frac{3}{4}}$

**3)** $16^{-\frac{1}{2}}$ **6)** $27^{-\frac{1}{3}}$ **9)** $4^{-\frac{3}{2}}$ **12)** $32^{-\frac{2}{5}}$

**5.** Вычислите:

**1)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ **3)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$

**2)** $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ **4)** $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$

5) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$

6) $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

7) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$

8) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{2}{5}}$

9) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}}$

10) $\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$

11) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$

12) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

**6.** Упростите выражение (используя свойства степеней):

1) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

2) $3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}$

3) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$

4) $2^{\frac{3}{4}} : 2^{\frac{1}{2}}$

5) $3^{\frac{5}{6}} : 3^{\frac{1}{3}}$

6) $7^{\frac{7}{8}} : 7^{\frac{1}{4}}$

7) $(2^{\frac{1}{3}})^6$

8) $(3^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$

9) $(4^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}$

10) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

11) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$

12) $y^{\frac{3}{4}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$

**7.** Упростите выражение (переходя к степеням):

1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

2) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

5) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}$

6) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x}$

7) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

8) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

9) $\sqrt{x\sqrt{x}}$

10) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

11) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

12) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$

**8.** Упростите выражение и представьте результат в виде корня:

1) $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$

2) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$

3) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$

4) $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}$

5) $(x^{\frac{1}{2}})^3 \cdot x^{\frac{1}{4}}$

6) $(a^{\frac{2}{3}})^2 \cdot a^{\frac{1}{2}}$

7) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{3}}}\right)^6$

8) $\left(\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{1}{4}}}\right)^{12}$

**9.** Найдите значение выражения:

1) $4^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}}$

2) $8^{\frac{2}{3}} - 4^{\frac{1}{2}}$

3) $16^{\frac{3}{4}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

4) $27^{\frac{2}{3}} : 9^{\frac{1}{2}}$

5) $(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}})^6$

6) $\left(\dfrac{8^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{1}{2}}}\right)^2$

7) $\dfrac{9^{\frac{3}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

8) $\dfrac{16^{\frac{3}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{2}}}{8^{\frac{2}{3}}}$

**10.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

**1)** $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ при $x = 64$

**2)** $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$ при $a = 16$

**3)** $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ при $x = 81$

**4)** $\dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{3}}}$ при $a = 64$

**5)** $(x^{\frac{1}{2}})^6$ при $x = 4$

**6)** $(a^{\frac{1}{3}})^9$ при $a = 8$

**7)** $(16x)^{\frac{1}{2}}$ при $x = 4$

**8)** $(27a)^{\frac{1}{3}}$ при $a = 8$

**11.** Сравните числа:

**1)** $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$

**2)** $4^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$

**3)** $5^{\frac{1}{2}}$ и $2^{\frac{3}{4}}$

**4)** $7^{\frac{2}{3}}$ и $3^{\frac{5}{4}}$

**5)** $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

**6)** $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{3}$

**7)** $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[3]{7}$

**8)** $\sqrt{6}$ и $\sqrt[3]{9}$

**12.** Найдите ошибку (если она есть):

**1)** $4^{\frac{1}{2}} = 2$

**2)** $8^{\frac{2}{3}} = 4$

**3)** $9^{\frac{3}{2}} = 27$

**4)** $16^{\frac{3}{4}} = 8$

**5)** $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x^{\frac{5}{6}}$

**6)** $\sqrt{x^2} = x$ (для любого $x$)

**7)** $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$

**8)** $(x^{\frac{1}{2}})^3 = x^{\frac{3}{2}}$

# Упрощение выражений со степенями и корнями

## Теория

В этой главе мы научимся упрощать выражения, в которых встречаются и степени, и корни. Здесь нам пригодятся все знания, полученные в предыдущих главах.

**Основные приёмы упрощения:**

1. **Приведение к общему основанию —** записать все числа в виде степеней одного и того же числа
2. **Переход к степеням —** заменить корни дробными степенями
3. **Применение свойств степеней —** умножение, деление, возведение в степень
4. **Вынесение общего множителя —** как в обычной алгебре
5. **Приведение подобных —** складывать можно только одинаковые корни/степени

**Полезные советы:**

- Если выражение содержит разные корни, часто удобно перейти к степеням
- Если выражение содержит степени с разными основаниями, попробуйте привести к одному основанию
- Не забывайте про область определения (подкоренные выражения должны быть неотрицательными)

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Приведение к общему основанию*

Упростите выражение:

$$\frac{9^{\frac{3}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{1}{2}}}$$

Заметим, что $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$. Перейдём к основанию 3:
$9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 3^3$
$27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3\cdot\frac{2}{3}} = 3^2$
$81^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^{4\cdot\frac{1}{2}} = 3^2$
Получаем: $\dfrac{3^3 \cdot 3^2}{3^2} = 3^{3+2-2} = 3^3 = 27$

## Пример 2

*Приведение к общему основанию*

Упростите выражение:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{32}$$

Перейдём к основанию 2: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{32} = \sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$
Складываем показатели: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{12}{6} = 2$
Получаем: $2^2 = 4$

## Пример 3

*Переход к степеням*

Упростите выражение:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$$

Перейдём к степеням: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{3}{4}}$
Складываем показатели: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{23}{12}$
Получаем: $a^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{a^{23}}$

## Пример 4

*Вынесение общего множителя*

Упростите выражение:

$$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}$$

Это подобные слагаемые: $(2+3-1)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

## Пример 5

*Вынесение общего множителя*

Упростите выражение:

$$\sqrt{8}+\sqrt{18}-\sqrt{32}$$

Сначала вынесем множители: $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$
Получаем: $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-4\sqrt{2}=(2+3-4)\sqrt{2}=1\sqrt{2}=\sqrt{2}$

## Пример 6

*Произведение корней*

Упростите выражение:

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

Это формула разности квадратов: $(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2=5-3=2$

## Пример 7

*Квадрат суммы*

Упростите выражение:

$$(\sqrt{7}+\sqrt{2})^2$$

Раскрываем по формуле: $(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=7+2\sqrt{14}+2=9+2\sqrt{14}$

## Пример 8

*Сложное выражение*

Упростите выражение:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

Приведём к общему знаменателю:

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-2\sqrt{xy}+y)+(x+2\sqrt{xy}+y)}{x-y}=\frac{2x+2y}{x-y}=\frac{2(x+y)}{x-y}$$

## Пример 9

*Освобождение от иррациональности в знаменателе*

Упростите выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряжённое выражение $\sqrt{5}+\sqrt{3}$:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Помните, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ нельзя упростить дальше. Это не равно $\sqrt{a+b}$! Например, $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$, а $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3,6$ — это разные числа.

# Задачи

**1.** Упростите, приводя к общему основанию:

1) $\dfrac{4^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{9^{\frac{5}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{3}{4}}}$

3) $\dfrac{16^{\frac{3}{4}} \cdot 32^{\frac{2}{5}}}{64^{\frac{1}{2}}}$

4) $\dfrac{25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{\frac{2}{3}}}{625^{\frac{1}{2}}}$

5) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{8}$

6) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{27}$

7) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[6]{125}$

8) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{343}$

**2.** Упростите, переходя к степеням:

1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

2) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x}$

3) $\dfrac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}$

5) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

6) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^4}$

7) $\sqrt{a\sqrt{a}}$

8) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$

9) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$

10) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$

**3.** Упростите, вынося множители и приводя подобные:

1) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$

2) $5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}$

3) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$

4) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

5) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}$

6) $\sqrt{28} + \sqrt{63} - \sqrt{112}$

7) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$

8) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$

9) $2\sqrt[4]{32} + 3\sqrt[4]{162} - 4\sqrt[4]{512}$

10) $3\sqrt[4]{48} - 2\sqrt[4]{243} + \sqrt[4]{768}$

**4.** Упростите, используя формулы сокращённого умножения:

1) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

2) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

3) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$

4) $(\sqrt{11} + \sqrt{10})(\sqrt{11} - \sqrt{10})$

5) $(\sqrt{2} + 1)^2$

6) $(\sqrt{3} - 1)^2$

7) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$

8) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2$

9) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

10) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$

11) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)$

12) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)$

**5.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

9) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$

10) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

11) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

12) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

**6.** Упростите сложные выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

2) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

5) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{4\sqrt{x}}$

6) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{2\sqrt{a}}$

**7.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $\sqrt{x}+\sqrt{9x}-\sqrt{4x}$ при $x=16$

2) $\sqrt{4x}+\sqrt{16x}-\sqrt{25x}$ при $x=9$

3) $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ при $x=4$

4) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ при $x=9, y=4$

5) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ при $x=9, y=4$

6) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ при $x=5$

**8.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

2) $\sqrt{8}+\sqrt{18}=5\sqrt{2}$

3) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

5) $\sqrt{x^2}=x$ (для любого $x$)

6) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$ (для $x\geq 0$)

# Сравнение степеней и корней

## Теория

В этой главе мы научимся сравнивать числа, содержащие степени и корни. Это важный навык, который пригодится при решении уравнений, неравенств и просто для понимания, какое число больше.

**Основные приёмы сравнения:**

1. **Сравнение степеней с одинаковым основанием:** если $a > 1$, то $a^p > a^q$ при $p > q$; если $0 < a < 1$, то $a^p < a^q$ при $p > q$
2. **Сравнение степеней с одинаковым показателем:** если $p > 0$, то $a^p > b^p$ при $a > b > 0$
3. **Приведение к одному показателю** — записать числа в виде корней с одинаковым показателем и сравнить подкоренные выражения
4. **Приведение к одному основанию** — записать числа в виде степеней одного числа и сравнить показатели
5. **Внесение множителя под корень** — чтобы сравнивать выражения вида $a\sqrt{b}$
6. **Возведение в квадрат (куб и т.д.)** — для сравнения выражений с корнями
7. **Оценка** — определить, между какими целыми числами находится значение

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Сравнение степеней с одинаковым основанием*

Что больше: $2^{0.5}$ или $2^{0.7}$?

Основание $2 > 1$, поэтому чем больше показатель, тем больше число. Так как $0.7 > 0.5$, то $2^{0.7} > 2^{0.5}$.

## Пример 2

*Сравнение степеней с одинаковым основанием меньше 1*

Что больше: $0.5^2$ или $0.5^3$?

Основание $0.5 < 1$, поэтому чем больше показатель, тем меньше число. Так как $2 < 3$, то $0.5^2 > 0.5^3$.

## Пример 3

*Сравнение степеней с одинаковым показателем*

Что больше: $3^2$ или $4^2$?

Показатель $2 > 0$, поэтому чем больше основание, тем больше число. Так как $4 > 3$, то $4^2 > 3^2$.

## Пример 4

*Приведение к одному показателю*

Что больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$?

Запишем в виде степеней: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$. Приведём к общему знаменателю $\frac{1}{6}$:

$2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$

$3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$

Так как $\sqrt[6]{9} > \sqrt[6]{8}$, то $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

## Пример 5

*Приведение к одному основанию*

Что больше: $8^2$ или $4^3$?

Запишем с одинаковым основанием 2: $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$, $4^3 = (2^2)^3 = 2^6$. Получили равные числа, значит $8^2 = 4^3$.

## Пример 6

*Внесение множителя под корень*

Что больше: $2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{2}$?

Внесём множители под корень: $2\sqrt{3} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{12}$, $3\sqrt{2} = \sqrt{9\cdot 2} = \sqrt{18}$. Так как $\sqrt{18} > \sqrt{12}$, то $3\sqrt{2} > 2\sqrt{3}$.

## Пример 7

*Возведение в квадрат*

Что больше: $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{6}+\sqrt{2}$?

Возведём оба числа в квадрат:

$(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{15}+3 = 8+2\sqrt{15}$

$(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = 6+2\sqrt{12}+2 = 8+2\sqrt{12}$

Так как $\sqrt{15} > \sqrt{12}$, то $8+2\sqrt{15} > 8+2\sqrt{12}$, значит $\sqrt{5}+\sqrt{3} > \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

## Пример 8

*Оценка*

Между какими целыми числами находится $\sqrt{50}$?

$7^2 = 49$, $8^2 = 64$. Так как $49 < 50 < 64$, то $7 < \sqrt{50} < 8$.

## Пример 9

*Сравнение через разность*

Что больше: $\sqrt{7}$ или 2.6?

Возведём в квадрат: $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(2.6)^2 = 6.76$. Так как $7 > 6.76$, то $\sqrt{7} > 2.6$.

## Пример 10

*Сравнение дробных степеней*

Что больше: $3^{0.4}$ или $5^{0.3}$?

Приведём к общему показателю 0.6: $3^{0.4} = 3^{\frac{2}{5}} = (3^2)^{\frac{1}{5}} = 9^{\frac{1}{5}}$, $5^{0.3} = 5^{\frac{3}{10}} = (5^3)^{\frac{1}{10}} = 125^{\frac{1}{10}}$. Трудно сравнить напрямую. Можно привести к общему знаменателю 10:

$3^{0.4} = 3^{\frac{4}{10}} = (3^4)^{\frac{1}{10}} = 81^{\frac{1}{10}}$

$5^{0.3} = 5^{\frac{3}{10}} = (5^3)^{\frac{1}{10}} = 125^{\frac{1}{10}}$

Так как $125^{\frac{1}{10}} > 81^{\frac{1}{10}}$, то $5^{0.3} > 3^{0.4}$.

# Задачи

**1.** Сравните числа (основания одинаковые):

1) $2^3$ и $2^4$
2) $3^2$ и $3^5$
3) $5^4$ и $5^3$
4) $7^2$ и $7^1$
5) $0.5^2$ и $0.5^3$
6) $0.2^3$ и $0.2^2$
7) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4$
8) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ и $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
9) $2^{0.5}$ и $2^{0.7}$
10) $3^{1.2}$ и $3^{0.8}$
11) $0.4^{0.3}$ и $0.4^{0.5}$
12) $1.5^2$ и $1.5^3$

**2.** Сравните числа (показатели одинаковые):

1) $2^3$ и $3^3$
2) $4^2$ и $5^2$
3) $6^3$ и $5^3$
4) $10^2$ и $9^2$
5) $2^{0.5}$ и $3^{0.5}$
6) $4^{0.3}$ и $5^{0.3}$
7) $0.5^2$ и $0.4^2$
8) $0.2^3$ и $0.3^3$

9) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ 10) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ 11) $1.2^2$ и $1.3^2$ 12) $0.8^3$ и $0.7^3$

**3.** Сравните числа, приводя к одному показателю:

1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$
2) $\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{4}$
3) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{3}$
4) $\sqrt[4]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$
5) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{7}$
6) $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt{6}$
7) $\sqrt[4]{7}$ и $\sqrt[3]{8}$
8) $\sqrt[5]{2}$ и $\sqrt[4]{3}$
9) $2^{\frac{1}{2}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$
10) $4^{\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{2}}$
11) $5^{\frac{1}{2}}$ и $2^{\frac{3}{4}}$
12) $7^{\frac{2}{3}}$ и $3^{\frac{5}{4}}$

**4.** Сравните числа, приводя к одному основанию:

1) $8^2$ и $4^3$
2) $9^3$ и $27^2$
3) $16^4$ и $8^5$
4) $25^3$ и $125^2$
5) $32^2$ и $4^5$
6) $81^3$ и $9^5$
7) $2^{10}$ и $4^5$
8) $3^{12}$ и $9^6$
9) $8^{\frac{2}{3}}$ и $4^{\frac{4}{3}}$
10) $27^{\frac{1}{3}}$ и $9^{\frac{1}{2}}$
11) $16^{\frac{3}{4}}$ и $8^{\frac{1}{2}}$
12) $32^{\frac{2}{5}}$ и $4^{\frac{3}{4}}$

**5.** Сравните числа, внося множитель под корень:

1) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$
2) $4\sqrt{2}$ и $2\sqrt{5}$
3) $3\sqrt{5}$ и $5\sqrt{3}$
4) $2\sqrt{6}$ и $3\sqrt{3}$
5) $5\sqrt{2}$ и $2\sqrt{7}$
6) $4\sqrt{3}$ и $3\sqrt{4}$
7) $2\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[3]{9}$
8) $3\sqrt[3]{3}$ и $2\sqrt[3]{10}$
9) $2\sqrt[4]{4}$ и $3\sqrt[4]{2}$
10) $4\sqrt[4]{2}$ и $2\sqrt[4]{8}$
11) $3\sqrt[4]{3}$ и $2\sqrt[4]{5}$
12) $5\sqrt[4]{2}$ и $2\sqrt[4]{10}$

**6.** Сравните числа, возводя в квадрат:

1) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$
2) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{4}$
3) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}+\sqrt{3}$
4) $\sqrt{13}+\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}+\sqrt{7}$
5) $2\sqrt{2}+1$ и $\sqrt{10}$
6) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}+1$
7) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{5}$
8) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{3}$

**7.** Оцените, между какими целыми числами находится значение:

1) $\sqrt{10}$ 4) $\sqrt{30}$ 7) $\sqrt{60}$ 10) $\sqrt[3]{20}$
2) $\sqrt{15}$ 5) $\sqrt{40}$ 8) $\sqrt{70}$ 11) $\sqrt[3]{30}$
3) $\sqrt{20}$ 6) $\sqrt{50}$ 9) $\sqrt[3]{10}$ 12) $\sqrt[3]{40}$

**8.** Расположите числа в порядке возрастания:

1) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}$

2) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}$

3) $2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{4}}$

4) $3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{4}}$

5) $2\sqrt{2}, 3, \sqrt{10}$

6) $3\sqrt{2}, 4, \sqrt{20}$

7) $2^{\frac{2}{3}}, 3^{\frac{1}{2}}, 4^{\frac{1}{3}}$

8) $5^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{4}{3}}, 3^{\frac{3}{4}}$

**9.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^3 > 2^2$

2) $0.5^3 > 0.5^2$

3) $3^2 < 4^2$

4) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

5) $2\sqrt{3} > 3\sqrt{2}$

6) $\sqrt{5} + \sqrt{3} > \sqrt{6} + \sqrt{2}$

# Освобождение от иррациональности в знаменателе

## Теория

В этой главе мы научимся освобождаться от иррациональности в знаменателе дроби. Это важный навык, который часто требуется при упрощении выражений и при решении уравнений.

**Зачем это нужно?**

- Выражение с иррациональностью в знаменателе считается не совсем упрощённым
- С рациональным знаменателем легче выполнять дальнейшие действия
- При сравнении чисел удобнее, когда знаменатель рациональный

**Основные приёмы:**

1. **Если в знаменателе один квадратный корень:** $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$
2. **Если в знаменателе сумма или разность с квадратным корнем:** используем сопряжённое выражение

$$\frac{A}{\sqrt{B}+\sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B}-\sqrt{C})}{B-C}$$

$$\frac{A}{\sqrt{B}-\sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B}+\sqrt{C})}{B-C}$$

3. **Если в знаменателе корень более высокой степени:** нужно домножить на такое выражение, чтобы под корнем получилась полная степень

$$\frac{A}{\sqrt[n]{B^k}} = \frac{A\sqrt[n]{B^{n-k}}}{B}$$

4. **Если в знаменателе сумма с кубическими корнями:** используем формулы суммы/разности кубов

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}} = \frac{A(\sqrt[3]{B^2}-\sqrt[3]{BC}+\sqrt[3]{C^2})}{B+C}$$

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{C}} = \frac{A(\sqrt[3]{B^2}+\sqrt[3]{BC}+\sqrt[3]{C^2})}{B-C}$$

Как это выглядит на практике? Смотрите на примерах.

## Пример 1

*Один квадратный корень в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

## Пример 2

*Один квадратный корень в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$

## Пример 3

*Сумма с квадратным корнем в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Умножаем числитель и знаменатель на сопряжённое $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

## Пример 4

*Разность с квадратным корнем в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

Умножаем на $\sqrt{5}+\sqrt{3}$:

$$\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

## Пример 5

*Выражение с числителем*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Умножаем на сопряжённое $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{3-2} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{6}+2 = 5+2\sqrt{6}$$

## Пример 6

*Кубический корень в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

Заметим, что $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$. Чтобы получить под корнем полный куб, умножим на $\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{2}$$

## Пример 7

*Кубический корень в знаменателе (общий случай)*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$$

Умножаем на $\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$:

$$\frac{5\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5\sqrt[3]{9}}{3}$$

## Пример 8

*Сумма кубических корней в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$$

Используем формулу для суммы кубов: $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}) = 2+3 = 5$
Умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}$:

$$\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}{5}$$

## Пример 9

*Корень четвёртой степени в знаменателе*

Освободитесь от иррациональности:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Умножаем на $\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$:

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

## Пример 10

*Важное предупреждение*

Освобождение от иррациональности — это тождественное преобразование, но нужно следить за областью определения. Например, при умножении на сопряжённое выражение мы не меняем значение дроби.

# Задачи

**1.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе (один квадратный корень):

1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
4) $\frac{3}{\sqrt{7}}$
5) $\frac{4}{\sqrt{11}}$
6) $\frac{5}{\sqrt{13}}$
7) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
8) $\frac{1}{3\sqrt{5}}$
9) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$
10) $\frac{3}{4\sqrt{10}}$
11) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
12) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

**2.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе (сумма или разность с квадратными корнями):

1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$
2) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$
3) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$
4) $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$
5) $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
6) $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{8}}$

7) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

8) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

9) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

10) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

11) $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}$

12) $\dfrac{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$

**3.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе (кубические корни):

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$

3) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

4) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}}$

10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}}$

11) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}}$

12) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}}$

**4.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе (корни более высоких степеней):

1) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

3) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{4}}$

4) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{8}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$

9) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{2}+\sqrt[5]{3}}$

10) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{4}-\sqrt[5]{2}}$

**5.** Упростите выражение и освободитесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

5) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

6) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$

7) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

**6.** Найдите значение выражения, предварительно освободившись от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ при $\sqrt{2} \approx 1.414$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$ при $\sqrt{3} \approx 1.732$

3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ при $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{3} \approx 1.732$

4) $\dfrac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ при $\sqrt{7} \approx 2.646$, $\sqrt{5} \approx 2.236$

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ при $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$

6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ при $\sqrt[3]{4} \approx 1.587$

**7.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$

3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3}+1$

4) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1} = \sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1$

# Итоговая практика на все приёмы

## Теория

Мы завершили изучение темы "Степени и корни". В этой главе собраны задачи на все приёмы, которые мы разобрали:

- **Степень с натуральным показателем:** определение, умножение, деление, возведение в степень
- **Степень с целым показателем:** нулевая степень, отрицательная степень
- **Корни:** определение, свойства корней, вынесение и внесение множителя
- **Степень с дробным показателем:** определение, действия, переход от корней к степеням
- **Преобразование выражений:** упрощение, сравнение, освобождение от иррациональности

Это итоговая проверка ваших знаний. Задачи здесь разного уровня сложности. Не расстраивайтесь, если что-то не получается сразу — вернитесь к соответствующим главам и повторите теорию.

## Задачи

**1.** Вычислите:

**1)** $2^5$ **2)** $3^4$ **3)** $5^3$ **4)** $4^5$ **5)** $(-2)^4$ **6)** $(-3)^3$ **7)** $(-5)^2$ **8)** $(-4)^3$ **9)** $2^0$ **10)** $3^0$ **11)** $(-7)^0$ **12)** $\left(\frac{2}{3}\right)^0$

**2.** Вычислите:

**1)** $2^{-1}$ **2)** $2^{-2}$ **3)** $3^{-2}$ **4)** $4^{-3}$ **5)** $(-2)^{-1}$ **6)** $(-2)^{-2}$ **7)** $(-3)^{-2}$ **8)** $(-4)^{-3}$ **9)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **10)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ **11)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ **12)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$

**3.** Вычислите:

**1)** $\sqrt{25}$ **2)** $\sqrt{36}$ **3)** $\sqrt{49}$ **4)** $\sqrt{64}$ **5)** $\sqrt[3]{8}$ **6)** $\sqrt[3]{27}$ **7)** $\sqrt[3]{64}$ **8)** $\sqrt[3]{125}$ **9)** $\sqrt[4]{16}$ **10)** $\sqrt[4]{81}$ **11)** $\sqrt[4]{256}$ **12)** $\sqrt[4]{625}$

**4.** Вычислите:

**1)** $4^{\frac{1}{2}}$ **2)** $9^{\frac{1}{2}}$ **3)** $8^{\frac{1}{3}}$ **4)** $16^{\frac{1}{4}}$ **5)** $4^{\frac{3}{2}}$ **6)** $8^{\frac{2}{3}}$ **7)** $16^{\frac{3}{4}}$ **8)** $32^{\frac{2}{5}}$ **9)** $4^{-\frac{1}{2}}$ **10)** $8^{-\frac{1}{3}}$ **11)** $16^{-\frac{3}{4}}$ **12)** $32^{-\frac{2}{5}}$

**5.** Представьте в виде степени:

1) $2^3 \cdot 2^4$

2) $3^2 \cdot 3^5$

3) $5^4 \cdot 5^3$

4) $7^5 : 7^2$

5) $(2^3)^4$

6) $(3^2)^5$

7) $x^5 \cdot x^3$

8) $a^7 : a^4$

9) $2^{-2} \cdot 2^5$

10) $3^{-3} \cdot 3^2$

11) $5^4 : 5^{-2}$

12) $(2^{-3})^2$

**6.** Представьте в виде корня:

1) $2^{\frac{1}{2}}$

2) $3^{\frac{1}{3}}$

3) $5^{\frac{1}{4}}$

4) $7^{\frac{2}{3}}$

5) $x^{\frac{1}{2}}$

6) $a^{\frac{2}{3}}$

7) $y^{\frac{3}{4}}$

8) $b^{\frac{5}{2}}$

9) $4^{\frac{3}{2}}$

10) $8^{\frac{2}{3}}$

11) $16^{\frac{3}{4}}$

12) $32^{\frac{4}{5}}$

**7.** Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{8}$

2) $\sqrt{12}$

3) $\sqrt{18}$

4) $\sqrt{20}$

5) $\sqrt{27}$

6) $\sqrt{32}$

7) $\sqrt{45}$

8) $\sqrt{50}$

9) $\sqrt[3]{16}$

10) $\sqrt[3]{24}$

11) $\sqrt[3]{54}$

12) $\sqrt[3]{81}$

**8.** Внесите множитель под знак корня:

1) $2\sqrt{2}$

2) $3\sqrt{3}$

3) $4\sqrt{5}$

4) $5\sqrt{6}$

5) $2\sqrt[3]{2}$

6) $3\sqrt[3]{4}$

7) $4\sqrt[3]{2}$

8) $5\sqrt[3]{3}$

9) $-2\sqrt{3}$

10) $-3\sqrt{5}$

11) $-4\sqrt[3]{2}$

12) $-5\sqrt[4]{3}$

**9.** Упростите выражение:

1) $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$

2) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$

3) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

4) $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}$

5) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{128}$

6) $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192}$

7) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

8) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2$

9) $(\sqrt{11} - \sqrt{5})^2$

10) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

**10.** Упростите выражение (переходя к степеням):

1) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}$

2) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

4) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$

5) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

6) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

7) $\sqrt{x\sqrt{x}}$

8) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

9) $\sqrt{x\sqrt[3]{x}}$

10) $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$

**11.** Упростите, приводя к общему основанию:

1) $\dfrac{4^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{1}{2}}}$

2) $\dfrac{9^{\frac{5}{2}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{3}{4}}}$

3) $\dfrac{16^{\frac{3}{4}} \cdot 32^{\frac{2}{5}}}{64^{\frac{1}{2}}}$

4) $\dfrac{25^{\frac{3}{2}} \cdot 125^{\frac{2}{3}}}{625^{\frac{1}{2}}}$

5) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[6]{8}$

6) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{27}$

**12.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$

5) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

7) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

8) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

**13.** Сравните числа:

1) $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{3}$

2) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$

3) $3^{\frac{1}{2}}$ и $2^{\frac{2}{3}}$

4) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

5) $8^2$ и $4^3$

6) $2^{0.5}$ и $2^{0.7}$

**14.** Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

1) $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}}$ при $x=64$

2) $\dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ при $x=81$

3) $\sqrt{x}+\sqrt{9x}-\sqrt{4x}$ при $x=16$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ при $x=4$

5) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ при $x=9, y=4$

6) $(2x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3x)^{\frac{1}{3}}$ при $x=8$

**15.** Упростите сложные выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{x-1}{4\sqrt{x}}$

4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot\dfrac{a-b}{2\sqrt{a}}$

5) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ (при $x\geq 1$)

6) $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

**16.** Найдите ошибку (если она есть):

1) $2^3\cdot 2^4=2^{12}$

2) $3^5:3^2=3^3$

3) $(2^3)^2=2^5$

4) $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

5) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

7) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$

8) $\sqrt{x^2}=x$ (для любого $x$)

# Заключение

Вот мы и добрались до конца книги. Если вы дошли до этих строк и прорешали хотя бы часть задач — значит, вы проделали огромную работу. Поздравляю!

Степени и корни — это тема, которая многих пугает в начале изучения. Слишком много правил, слишком много разных случаев, слишком много преобразований. Но теперь вы убедились, что все эти правила складываются в стройную логическую систему, где нет ничего лишнего.

Давайте вспомним, какой путь мы прошли.

## Что мы узнали

Мы начали с самого простого — научились понимать, что такое степень с натуральным показателем и как её вычислять. Освоили все основные свойства: умножение и деление степеней с одинаковым основанием, возведение степени в степень, степень произведения и частного.

Затем расширили понятие степени на нулевой и отрицательный показатели. Убедились, что все свойства остаются в силе и для этих случаев.

Потом познакомились с арифметическим корнем. Научились извлекать корни разных степеней, применять свойства корней, выносить и вносить множители.

И наконец, объединили степени и корни — ввели степень с дробным показателем. Научились свободно переходить от записи с корнями к записи со степенями и обратно, выбирая более удобную форму в зависимости от задачи.

## Что дальше

Если вы школьник, эти знания пригодятся вам во всех последующих темах алгебры:

- преобразование алгебраических выражений;
- решение уравнений и неравенств;
- показательная и логарифмическая функции;
- прогрессии;
- задачи с параметрами.

Без уверенного владения степенями и корнями двигаться дальше будет очень трудно. Поэтому, если чувствуете пробелы — вернитесь к соответствующим главам и порешайте ещё задач.

## Напутствие

Помните: математика не терпит суеты, но она очень благодарна тем, кто проявляет терпение и настойчивость. Не бойтесь ошибаться — ошибки неизбежны при изучении нового. Важно понять, почему ошибка возникла, и в следующий раз её не допустить.

Если какие-то темы остались непонятыми — не расстраивайтесь. Вернитесь к ним ещё раз. Порешайте дополнительные задачи. Посмотрите разборы примеров. Понимание приходит не сразу, а через многократное повторение.

## Благодарности

Спасибо, что читали. Если нашли ошибки или есть предложения — пишите. Книга будет жить и развиваться.

Больше моих книг вы можете найти на сайте books.mrepetitor.com. Там есть пособия по алгебре, геометрии, физике — всё, что я наработал за годы преподавания.

Записаться на мои занятия можно на сайте study.mrepetitor.com. Я продолжаю преподавать математику и физику для школьников с 5 по 11 классы, готовлю к ЕГЭ, ОГЭ и ЦТ.

Удачи в учёбе и побольше интересных задач!

*Дмитрий Трепачёв*